

# Mechanika ogólna

Wykład nr 12

## Podstawy dynamiki

1

## Dynamika

- Dział **mechaniki** zajmujący się badaniem związków między ruchem punktów materialnych i ciał sztywnych oraz sił go wywołujących.
- Dynamika bada zależności między takimi wielkościami jak: siła, przyspieszenie, prędkość, pęd, kręt, praca, energia itd.

2

# Pierwsza zasada dynamiki Newtona

## ■ Prawo bezwładności:

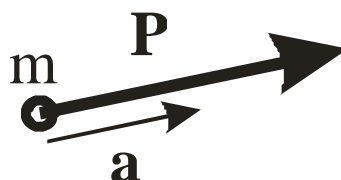
- Z punktu widzenia dynamiki jest wszystko jedno, czy ciało się porusza ruchem jednostajnym prostoliniowym, czy jest w spoczynku.
- W obu przypadkach siły działające na ciało są w równowadze.
- Można zawsze założyć istnienie nieruchomego układu odniesienia.

3

# Druga zasada dynamiki Newtona

- Pod działaniem stałej siły punkt materialny porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej.
- Przyspieszenie z jakim porusza się punkt jest wprost proporcjonalne do działającej siły (wypadkowej układu sił), a odwrotnie proporcjonalne do masy ciała.

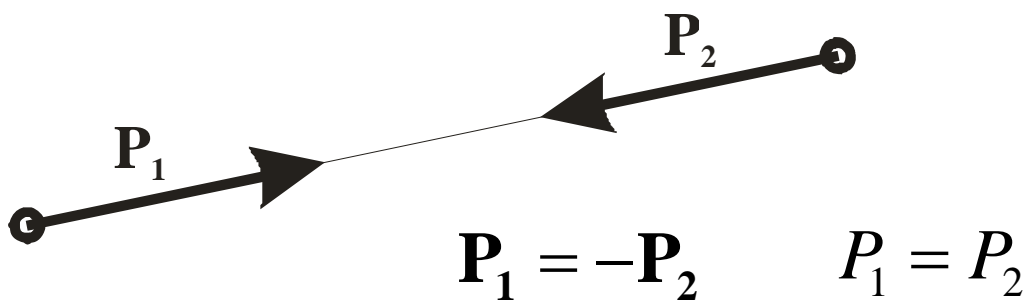
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{P}}{m}$$



4

# Trzecia zasada dynamiki Newtona

- Siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych równoważą się, tj. mają jednakowe moduły i kierunki, zaś zwroty przeciwne.



5

# Zasada superpozycji

- Efekt działania kilku wpływów na ciało można wyrazić jako sumę efektów ich działania.
- Przyspieszenie z jakim porusza się ciało pod wpływem układu sił (siły wypadkowej) może zostać obliczone jako suma przyspieszeń powodowanych przez każdą z sił składowych.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \dots + m\mathbf{a}_n = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n = \mathbf{P}$$

6

# Prawo grawitacji

- Dwa ciała działają na siebie wzajemnie jednakowymi co do wartości i przeciwnie zwróconymi siłami o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości między ich środkami i wprost proporcjonalnej do iloczynu mas tych ciał.

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

7

# Równania ruchu punktu materialnego

- Dynamiczne równanie różniczkowe ruchu punktu materialnego:

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{P}$$

- Dynamiczne różniczkowe równania ruchu we współrzędnych prostokątnych:

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot a_x = \sum_i P_{ix}$$

$$m \cdot \ddot{y} = m \cdot a_y = \sum_i P_{iy}$$

$$m \cdot \ddot{z} = m \cdot a_z = \sum_i P_{iz}$$

8

# Skalarne równania ruchu

- Rzutowanie przyspieszenia na osie normalną, styczną i binormalną:

$$m \cdot a_n = m \frac{v^2}{\rho} = \sum_i P_{in} \quad m \cdot a_t = m \frac{dv}{dt} = \sum_i P_{it}$$

$$m \cdot a_b = \sum_i P_{ib} \quad a_b = 0$$

- Wektor przyspieszenia całkowitego leży na płaszczyźnie ściśle stycznej do toru.

9

## Pierwsze i drugie zadanie dynamiki

- Pierwsze zadanie dynamiki:
  - Dana jest masa i równania ruchu punktu materialnego, należy wyznaczyć siły działające na ten punkt;
- Drugie zadanie dynamiki:
  - Dana jest masa i siły działające na punkt materialny, należy wyznaczyć równania ruchu tego punktu.

# Pierwsze zadanie dynamiki

- Równanie ruchu:

$$m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}$$

- Składowe wypadkowej we współrzędnych prostokątnych:

$$P_x = m\ddot{x} \quad P_y = m\ddot{y} \quad P_z = m\ddot{z}$$

- Wartość i kierunek wypadkowej:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

$$\cos \angle(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = \frac{P_x}{P} \quad \cos \angle(\mathbf{P}, \mathbf{j}) = \frac{P_y}{P} \quad \cos \angle(\mathbf{P}, \mathbf{k}) = \frac{P_z}{P}$$

11

# Drugie zadanie dynamiki

- Ruch punktu pod działaniem siły:

- Stałej co do wartości i kierunku;

$$\mathbf{P} = \text{const}$$

- Zależnej od czasu;

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$$

- Zależnej od prędkości;

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(v)$$

- Zależnej od położenia.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(x)$$

12

# Ruch pod działaniem stałej siły <sup>(1)</sup>

- Rzut ukośny:

- Równania ruchu:

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = -mg$$

- Składowe przyspieszeń:

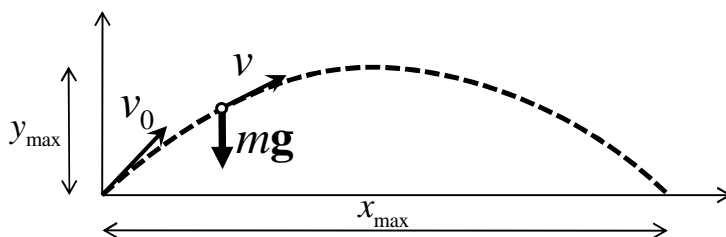
$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

- Składowe prędkości:

$$v_x = C_1 \quad v_y(t) = -gt + C_2$$

- Równania ruchu:

$$x(t) = C_1 t + C_3 \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4$$



13

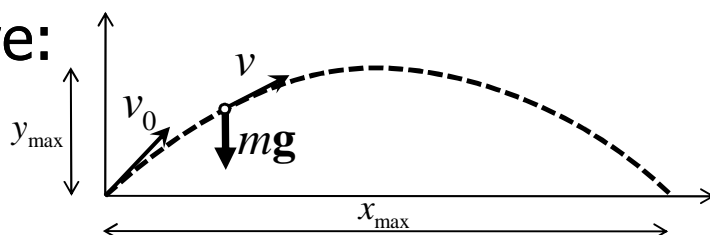
# Ruch pod działaniem stałej siły <sup>(2)</sup>

- Warunki brzegowe:

$$v_x(t=0) = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y(t=0) = v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

$$x(t=0) = 0 \quad y(t=0) = 0$$



- Stałe całkowania:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha \quad C_2 = v_0 \sin \alpha \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0$$

- Równania prędkości:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

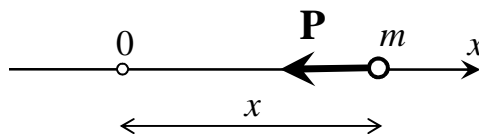
- Równania ruchu

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha$$

14

# Ruch pod działaniem siły zależnej od położenia

- Drgania liniowe:
- Różniczkowe równanie ruchu:



$$P_x = ma_x = m\ddot{x} = -kx \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Rozwiązanie ogólne:

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_0) \quad C_1 = a \cos \varphi_0 \quad C_2 = a \sin \varphi_0$$

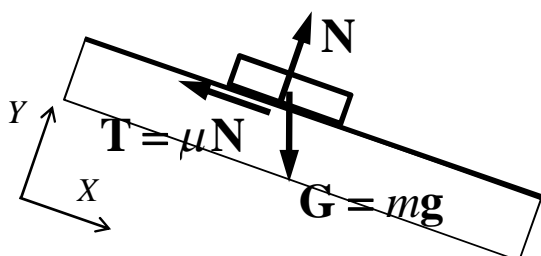
(Równanie ruchu harmonicznego prostego)

15

# Ruch nieswobodnego punktu materialnego

- W przypadku, gdy warunki zewnętrzne ograniczają swobodę ruchu, w równaniu ruchu należy uwzględnić także siły bierne (reakcje więzów):

$$m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} + \mathbf{R}$$



$$ma_x = \sum P_x$$

$$0 = ma_y = \sum P_y$$

16

# Siła bezwładności

- Równanie ruchu:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a} \quad \mathbf{P} - m\mathbf{a} = 0$$

- Siła bezwładności (d'Alemberta):

$$\mathbf{B} = -m\mathbf{a}$$

- Zasada d'Alemberta:

- Siły rzeczywiste działające na punkt materialny równoważą się z siłą bezwładności tego punktu.

$$\mathbf{P} + \mathbf{B} = 0$$

