

Mechanika ogólna

Wykład nr 3

Wyznaczanie reakcji.

Układy z przegubami.

Statyczna wyznaczalność układu.

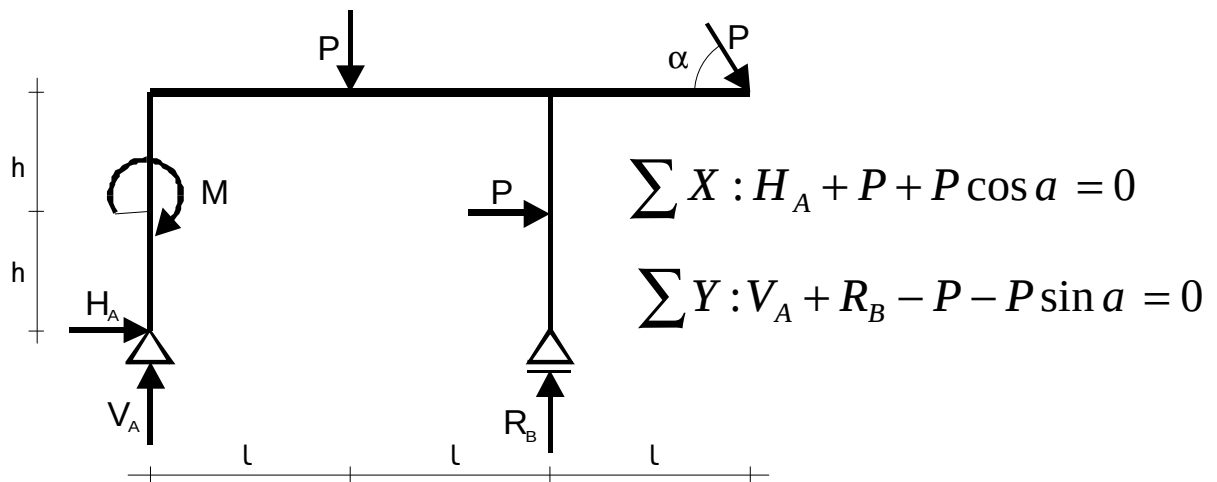
1

Jednostki obciążeń

- n Obciążenie ciągłe – kN/m
- n Siła skupiona - kN
- n Moment skupiony - kNm
- n Obciążenie ciągłe momentem – kNm/m

2

Reakcje – rama bezprzegubowa

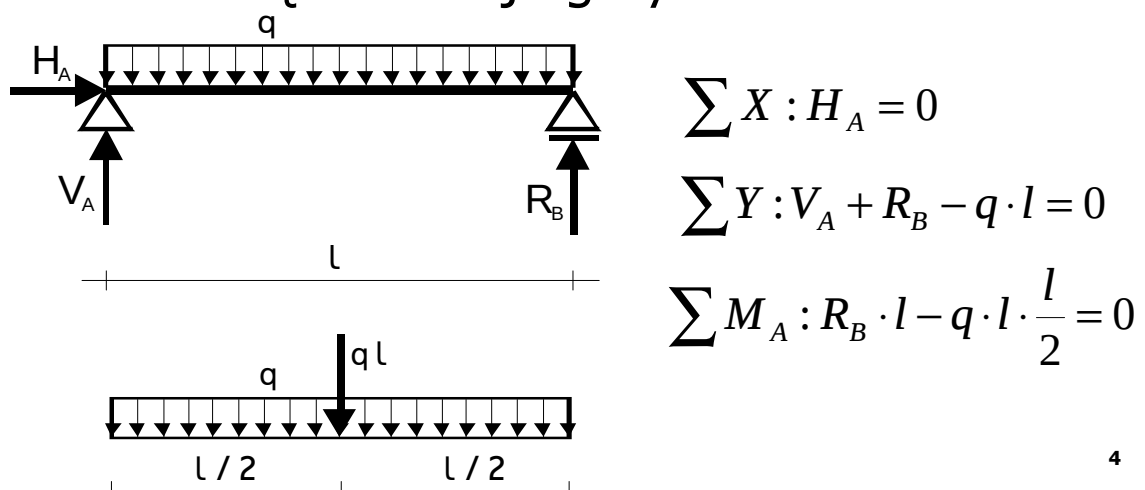


$$\sum M_A : M + P \cdot l + P \cdot h + P \cos \alpha \cdot 2h + P \sin \alpha \cdot 3l - R_B \cdot 2l = 0$$

3

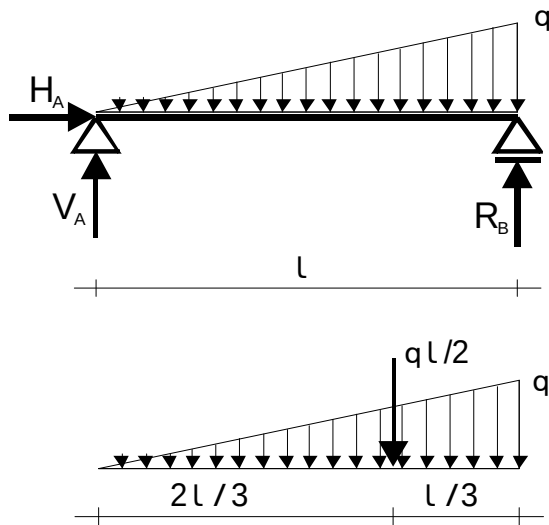
Obciążenie ciągłe równomierne

n Miara wypadkowej obciążenia rozłożonego liniowo równa jest polu figury opisującej obciążenie i powinna zostać przyłożona w środku ciężkości tej figury.



4

Obciążenie ciągłe trójkątne



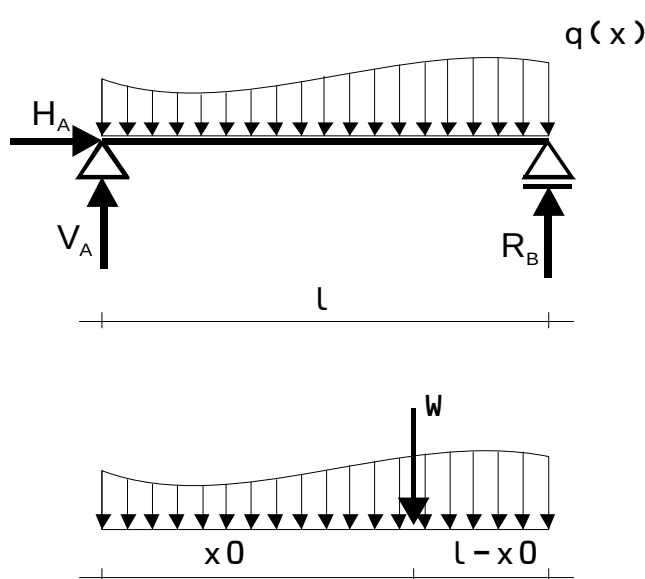
$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - \frac{1}{2} q \cdot l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - \frac{1}{2} q \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = 0$$

5

Obciążenie ciągłe dowolne



$$W = \int_0^l q(x) dx$$

$$x_0 = \frac{\int_0^l q(x) \cdot x dx}{W}$$

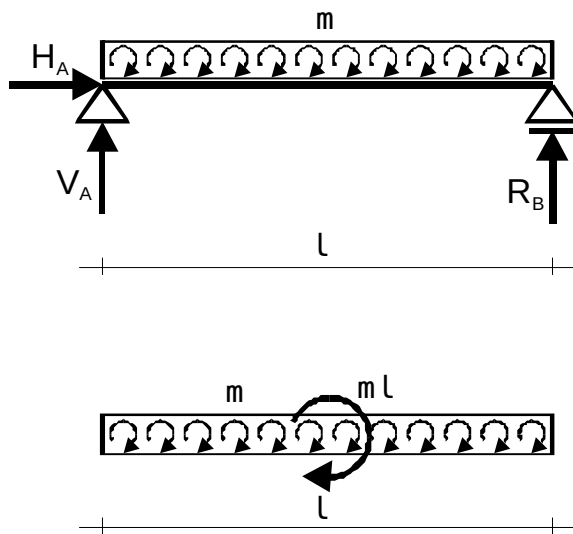
$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - W = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - W \cdot x_0 = 0$$

6

Obciążenie ciągłe momentem



$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - m \cdot l = 0$$

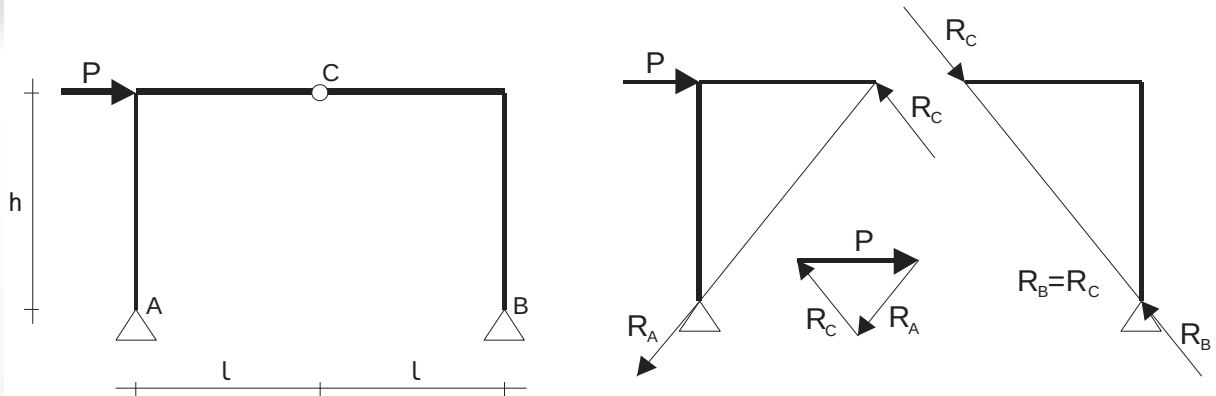
7

Przegub

- n Połączenie elementów prętowych w taki sposób, że mogą się one swobodnie obracać (nie powstaje moment mogący przeciwdziałać obrotowi).
- n Uzyskuje się dodatkowy punkt, w którym moment wewnętrzny jest równy zero.
- n Moment w przegubie od sił zewnętrznych znajdujących się po jednej ze stron przegubu równy jest 0.

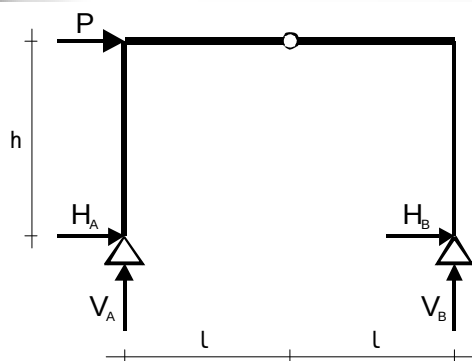
8

Podział ramy w przegubie



9

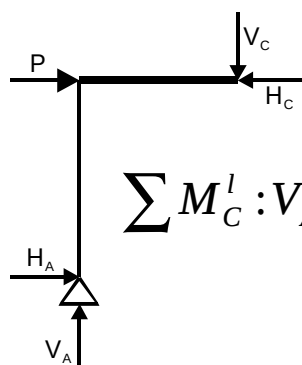
Dodatkowe równanie dla przegubu



$$\sum X : H_A + H_B + P = 0$$

$$\sum Y : V_A + V_B = 0$$

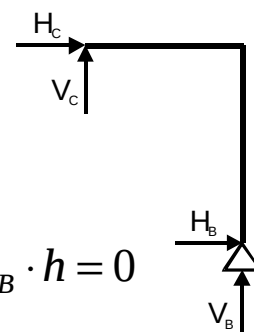
$$\sum M_A : V_B \cdot 2l - P \cdot h = 0$$



Czwarte równanie:

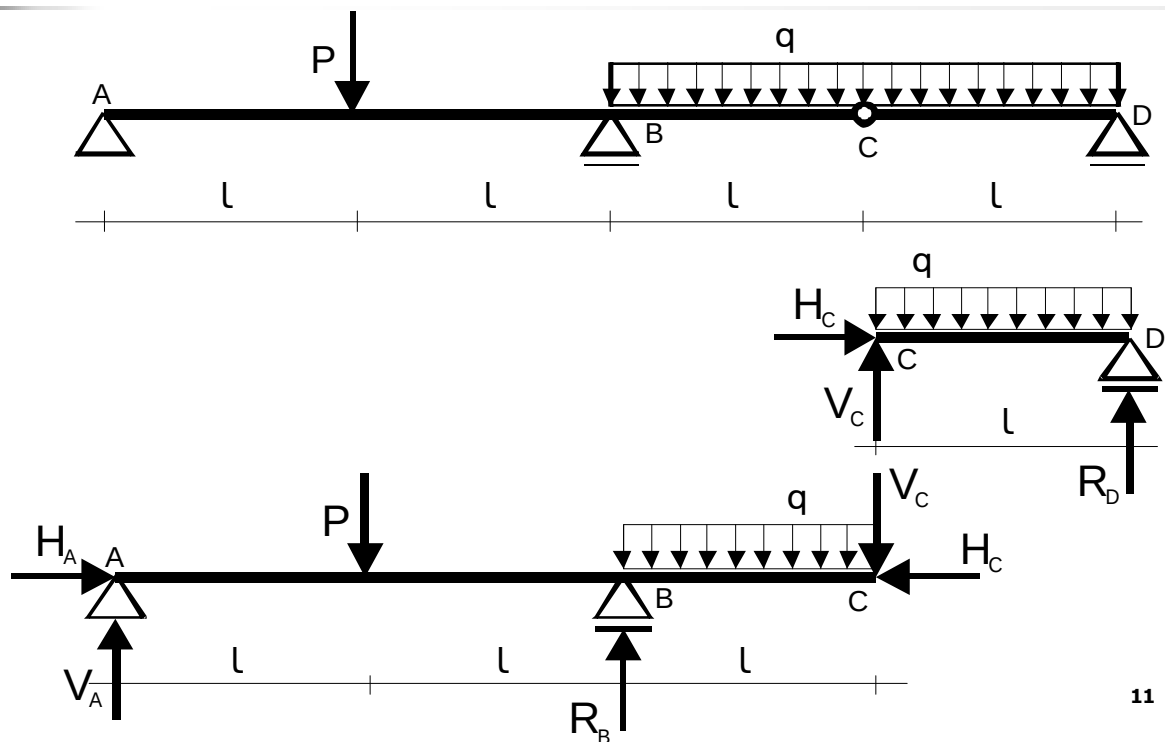
$$\sum M_C^l : V_A \cdot l - H_A \cdot h = 0$$

albo
$$\sum M_C^p : V_B \cdot l + H_B \cdot h = 0$$



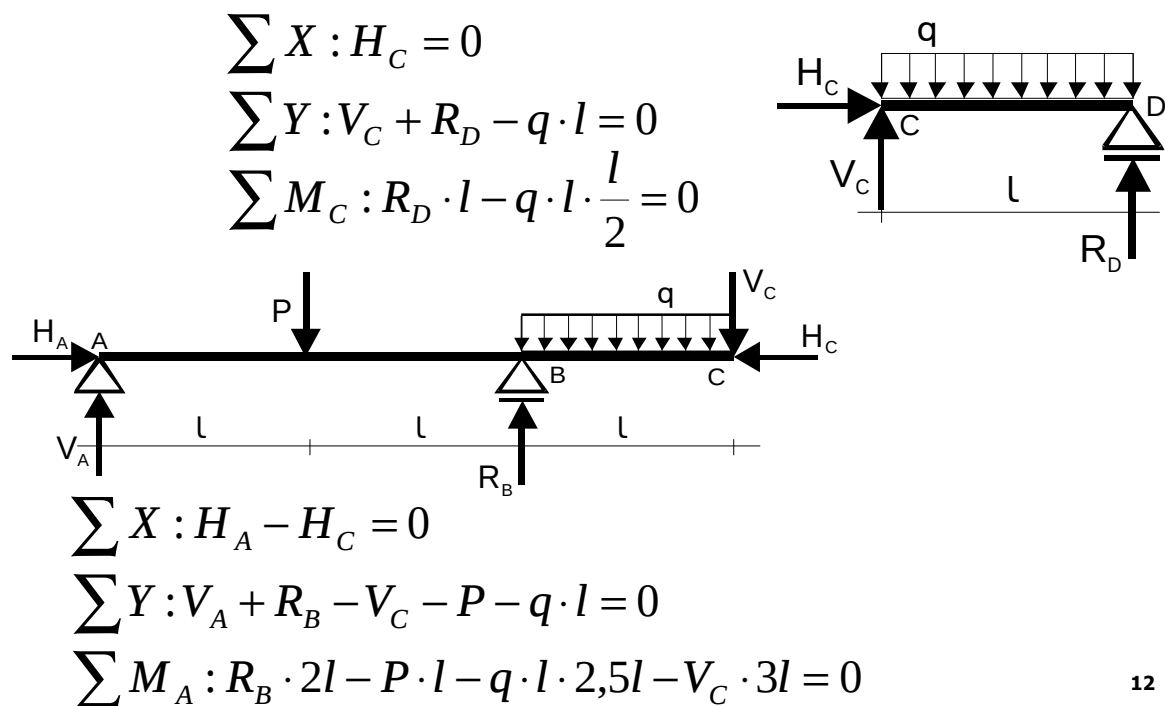
10

Belki przegubowe – rozkład na belki proste



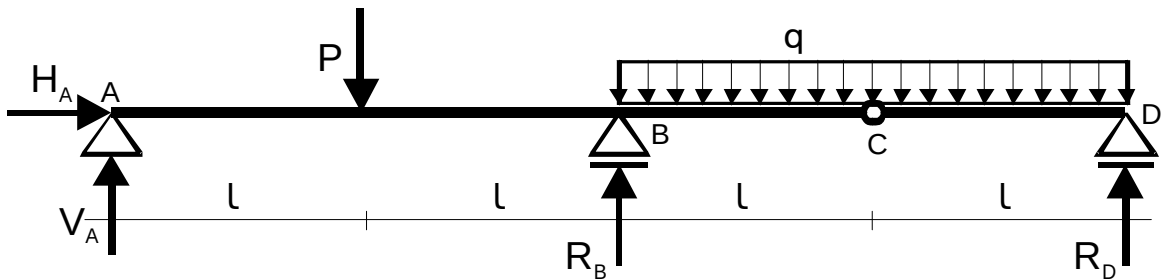
11

Belki proste – równania równowagi



12

Reakcje – belki przegubowe (1)



$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_D - P - q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_D \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_C^P : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

13

Rozwiązanie

$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum M_C^P : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_D = q \cdot \frac{l}{2}$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + \underline{R_D} \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{-R_D \cdot 4l + P \cdot l + q \cdot 2l \cdot 3l}{2l} = -2R_D + \frac{P}{2} + q \cdot 3l = \frac{P}{2} + q \cdot 2l$$

$$\sum Y : V_A + \underline{R_B} + \underline{R_D} - P - q \cdot 2l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A = P + q \cdot 2l - R_B - R_D = P + q \cdot 2l - \frac{P}{2} - q \cdot 2l - q \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} - q \cdot \frac{l}{2}$$

14

Podstawienie danych

$$q = 5 \text{ kN} / \text{m}$$

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$l = 2 \text{ m}$$

$$H_A = 0$$

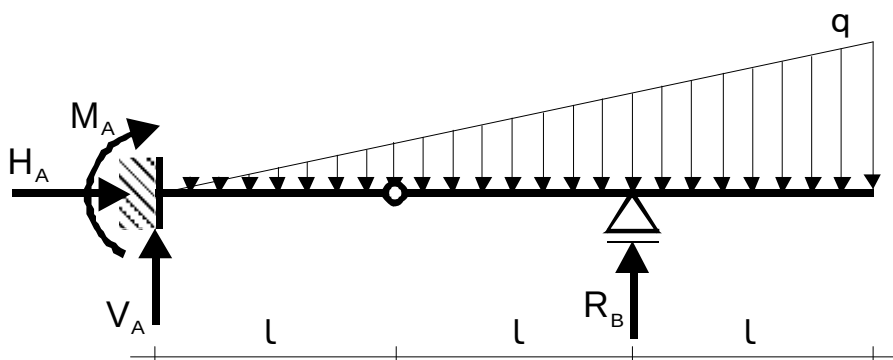
$$R_D = q \cdot \frac{l}{2} = 5 \text{ kN} / \text{m} \cdot \frac{2 \text{ m}}{2} = 5 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{P}{2} + q \cdot 2l = \frac{10 \text{ kN}}{2} + 5 \text{ kN} / \text{m} \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} = 25 \text{ kN}$$

$$V_A = \frac{10 \text{ kN}}{2} - 5 \text{ kN} / \text{m} \cdot \frac{2 \text{ m}}{2} = 0$$

15

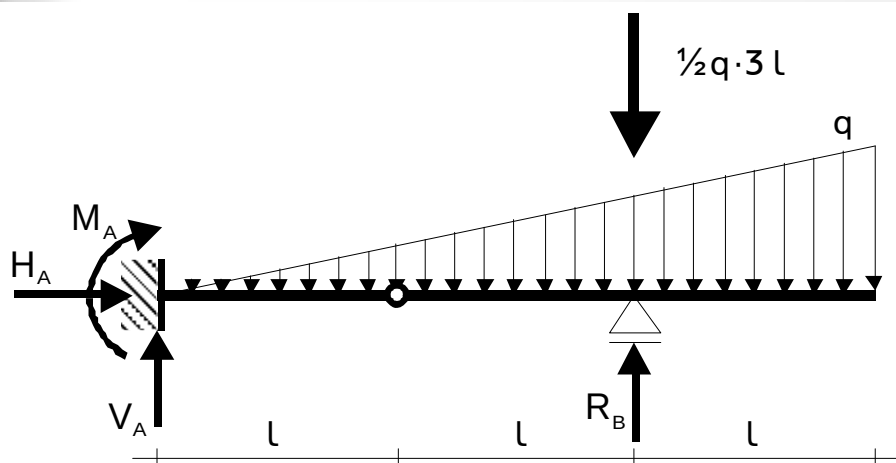
Reakcje – belki przegubowe (2)



$$\sum X : H_A = 0$$

16

Wypadkowa obciążenia trójkątnego

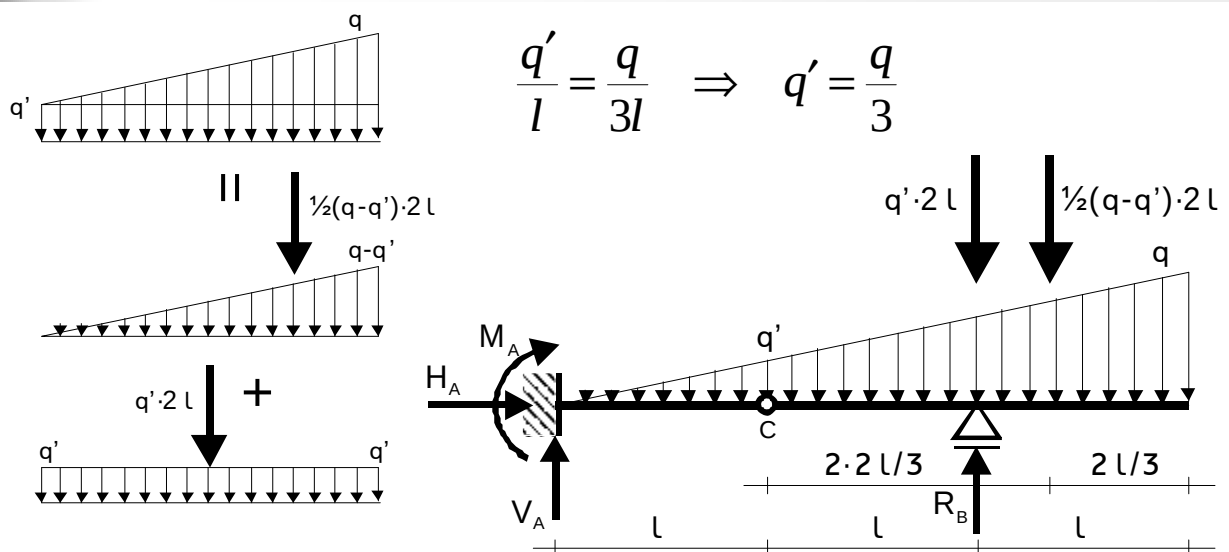


$$\sum Y : V_A + R_B - \frac{1}{2} q \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - M_A - \frac{1}{2} q \cdot 3l \cdot 2l = 0$$

17

Suma momentów względem przegubu



$$\sum M_C^p : R_B \cdot l - q' \cdot 2l \cdot l - \frac{1}{2} (q - q') \cdot 2l \cdot 2 \frac{2l}{3} = 0$$

18

Rozwiązanie

$$\sum X : H_A = 0 \quad \sum M_C^P : R_B \cdot l - \frac{q}{3} \cdot 2l^2 - \frac{1}{2} \frac{2q}{3} \cdot \frac{8l^2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{2}{3} \cdot ql + \frac{8}{9} \cdot ql = \frac{14}{9} \cdot ql$$

$$\sum Y : V_A + R_B - \frac{1}{2} q \cdot 3l = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{3}{2} \cdot ql - \frac{14}{9} \cdot ql = -\frac{1}{18} \cdot ql$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - M_A - \frac{1}{2} q \cdot 3l \cdot 2l = 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{14}{9} \cdot 2ql^2 - 3ql^2 = \frac{1}{9} \cdot ql^2 \quad 19$$

Podstawienie danych

$$q = 10 \text{ kN} / \text{m}$$

$$l = 1,5 \text{ m}$$

$$H_A = 0$$

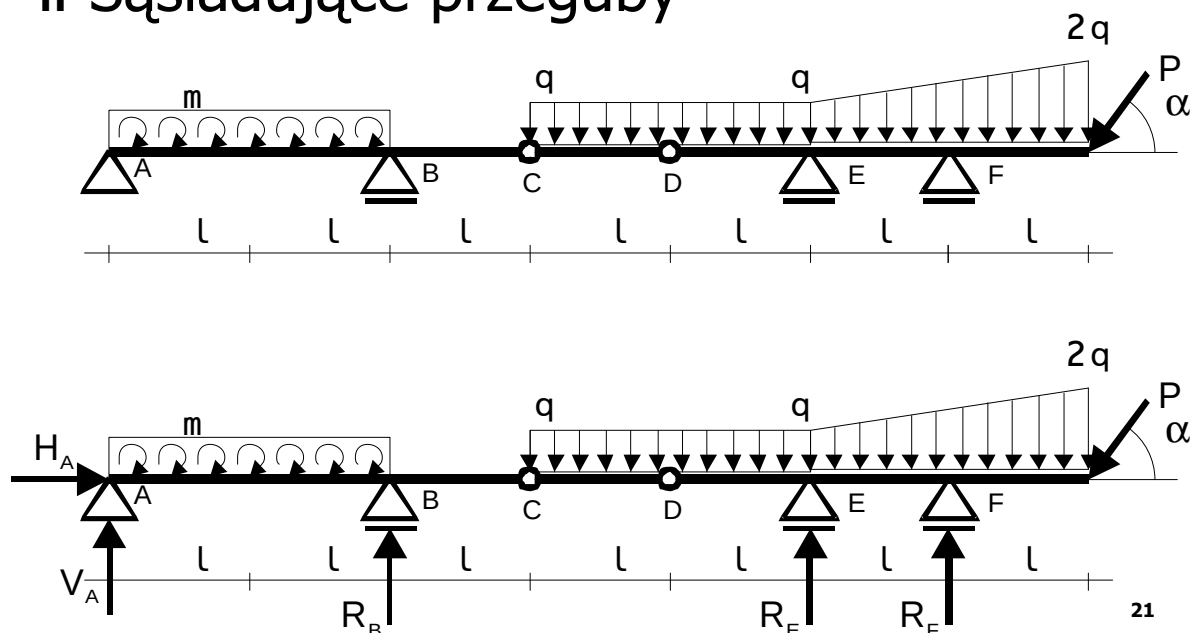
$$V_A = -\frac{1}{18} \cdot ql = -\frac{1}{18} \cdot 10 \text{ kN} / \text{m} \cdot 1,5 \text{ m} = -0,833 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{14}{9} \cdot ql = \frac{14}{9} \cdot 10 \text{ kN} / \text{m} \cdot 1,5 \text{ m} = 23,333 \text{ kN}$$

$$M_A = \frac{1}{9} \cdot ql^2 = \frac{1}{9} \cdot 10 \text{ kN} / \text{m} \cdot (1,5 \text{ m})^2 = 2,5 \text{ kNm}$$

Belki przegubowe (3)

n Sąsiadujące przeguby



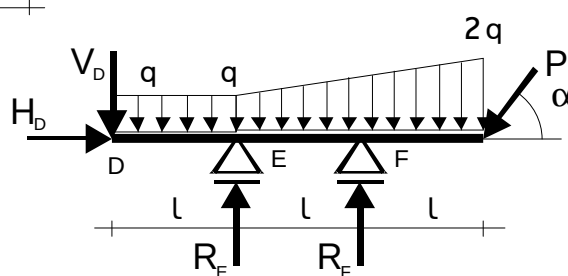
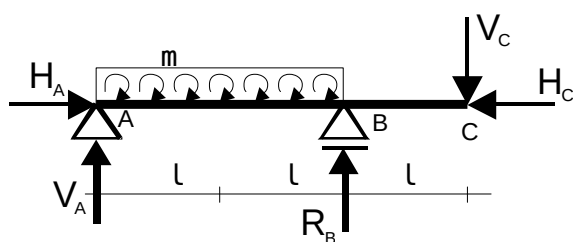
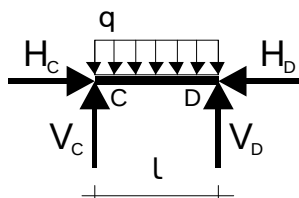
Belki proste – równania równowagi

n 9 niewiadomych – 9 równań

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

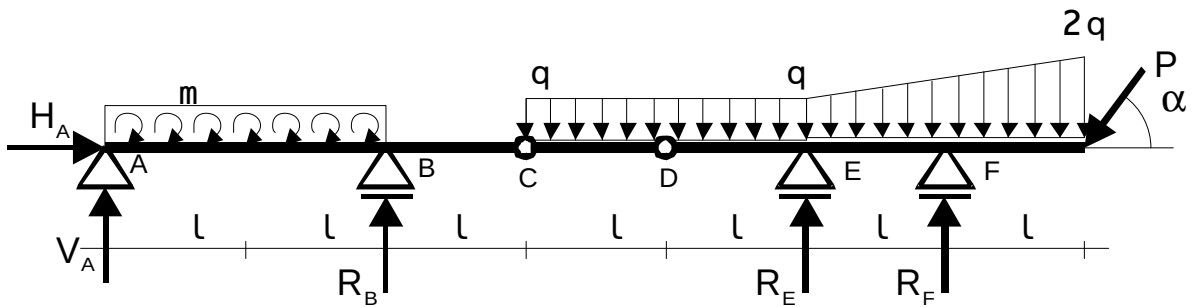
$$\sum M_C = 0$$



$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_D = 0$$

Reakcje – belki przegubowe ⁽³⁾



$$\sum X : H_A - P \cos a = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B + R_E + R_F - q \cdot 4l - \frac{1}{2} q \cdot 2l - P \sin a = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_E \cdot 5l + R_F \cdot 6l - m \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(5l + \frac{2}{3} 2l \right) - P \sin a \cdot 7l = 0$$

$$\sum M_C^I : V_A \cdot 3l + R_B \cdot l + m \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_D^P : R_E \cdot l + R_F \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(l + \frac{2}{3} 2l \right) - P \sin a \cdot 3l = 0$$

23

Sąsiadujące przeguby – łatwość rozwiązania

n Równania względem sąsiadujących przegubów lepiej zapisać z tej samej strony.

$$\sum X : H_A - P \cos a = 0$$

$$\sum Y:V_A+R_B+R_E+R_F-q\cdot 4l-\frac{1}{2}q\cdot 2l-P\sin a=0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_E \cdot 5l + R_F \cdot 6l - m \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(5l + \frac{2}{3} 2l \right) - P \sin a \cdot 7l = 0$$

$$\sum M_C^I : V_A \cdot 3l + R_B \cdot l + m \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_D^p : R_E \cdot l + R_F \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(l + \frac{2}{3} 2l \right) - P \sin \alpha \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_D^I : V_A \cdot 4l + R_B \cdot 2l + m \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2}l = 0$$

24

Rozwiązanie

$$P = 10kN$$

$$q = 5kN / m$$

$$m = 5kNm / m$$

$$l = 1m$$

$$H_A = 5kN$$

$$V_A = -6,25kN$$

$$R_B = 8,75kN$$

$$R_E = 2,173kN$$

$$R_F = 28,987kN$$

25

Zasady pisania dodatkowych równań dla przegubów ⁽¹⁾

- n Dodatkowe równanie względem przegubu musi wykorzystywać własność przegubu, tj. że moment w przegubie równy jest 0, a więc dodatkowe równanie nie może być zwykłą sumą momentów względem przegubu, a musi być sumą momentów od sił z jednej strony przegubu.

26

Zasady pisania dodatkowych równań dla przegubów ⁽²⁾

- n Każdy przegub musi zostać wykorzystany co najmniej jeden raz.
- n Jeżeli chcemy zapisać równanie dla przegubu z drugiej strony, to zastępuje ono jedno z równań podstawowych (sumę momentów względem dowolnego punktu).