

Mechanika ogólna

Wykład nr 8

Zjawisko tarcia. Prawa tarcia.

1

Literatura

- [1] J. Leyko: *Mechanika ogólna*
- [2] J. Leyko: *Mechanika ogólna w zadaniach*
- [3] J. Misiak: *Mechanika ogólna*
- [4] J. Misiak: *Zadania z mechaniki ogólnej*
- [5] Z. Dyląg, A. Jakubowicz, Z. Orłoś:
Wytrzymałość materiałów (Tom 1)
- [6] P. Jastrzębski, J. Mutermilch,
W. Orłowski: *Wytrzymałość materiałów*
(Tom 1)

2

Zaliczenie

- Ćwiczenia:
 - obecności;
 - ćwiczenie projektowe;
 - kolokwia.
- Wykłady:
 - zaliczenie pisemne.

3

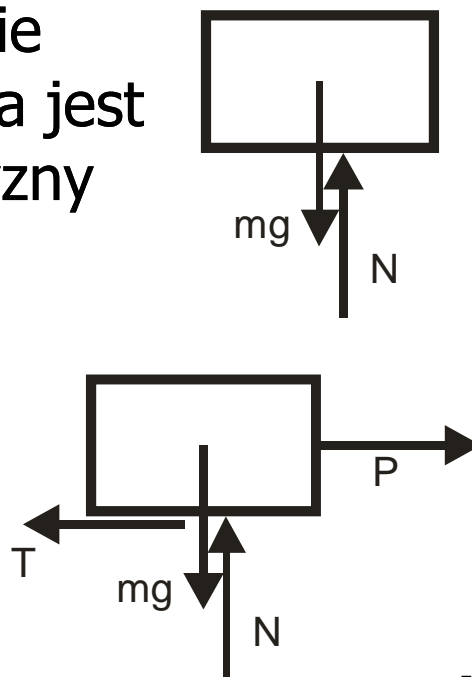
Program zajęć

- Zjawisko tarcia i prawa tarcia;
- Charakterystyki geometryczne figur płaskich;
- Elementy kinematyki i dynamiki;
- Zasada prac przygotowanych.

4

Więzy z tarciem

- W więzach, w których nie występuje tarcie, reakcja jest prostopadła do płaszczyzny styku ciał (nacisk).
- W więzach z tarciem dochodzi jeszcze jedna reakcja, równoległa do płaszczyzny styku.



Prawa tarcia statycznego Coulomba i Morena

- Siła tarcia jest zawsze **przeciwna do** występującego lub ewentualnego **ruchu**.
- Wielkość siły tarcia jest **niezależna od** pola **powierzchni** stykających się ciał, **zależy** jedynie **od rodzaju powierzchni**.
- Zależność między naciskiem i siłą tarcia:
$$T = \mu \cdot N$$

Współczynnik tarcia

Rodzaj powierzchni	μ
Stal-stal	0,15
Stal-żeliwo	0,18
Żeliwo-żeliwo	0,45
Metal-drewno	0,5-0,6
Drewno-drewno	0,65
Skóra-metal	0,6

7

Tarcie statyczne i kinetyczne

- Tarcie występuje w przypadku układów poruszających (**kinetyczne**) lub w układach, w których ruch jest potencjalnie możliwy, ale jeszcze do niego nie dochodzi (**statyczne**).

8

Tarcie statyczne

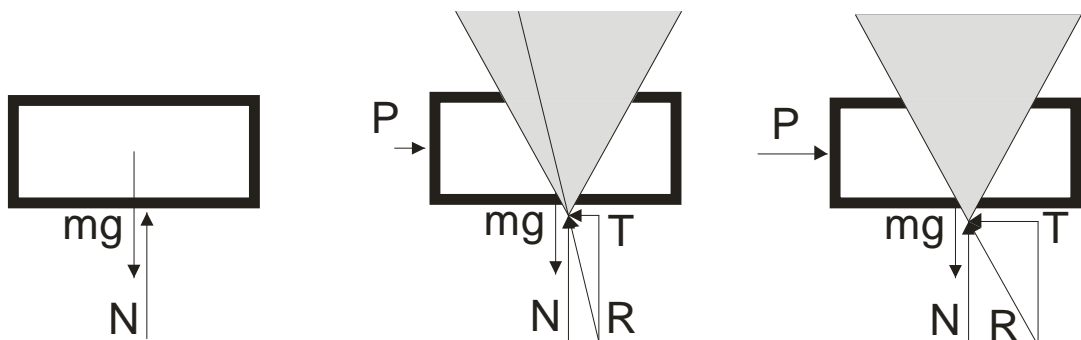
- Tarcie **statyczne** przeciwdziałające wystąpieniu ruchu zwiększa się w wyniku przyłożenia siły od 0 do wartości maksymalnej (tarcie całkowicie rozwinięte).

9

Kąt tarcia

- Kąt między reakcją pionową a siłą tarcia nazywany jest kątem tarcia:

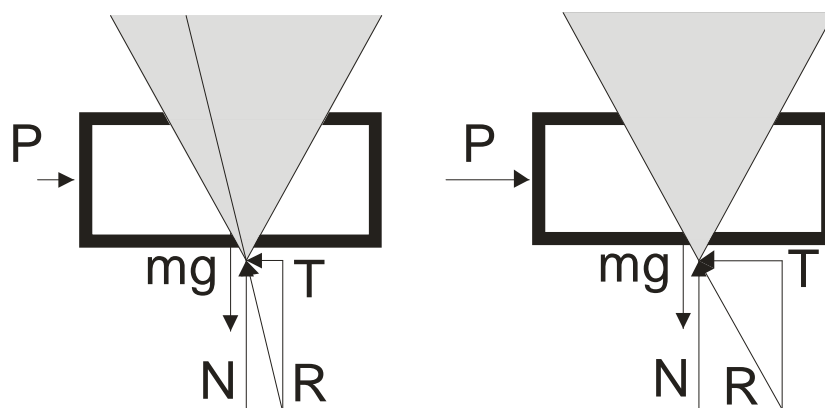
$$\mu = \frac{T}{N} = \operatorname{tg} \phi$$



10

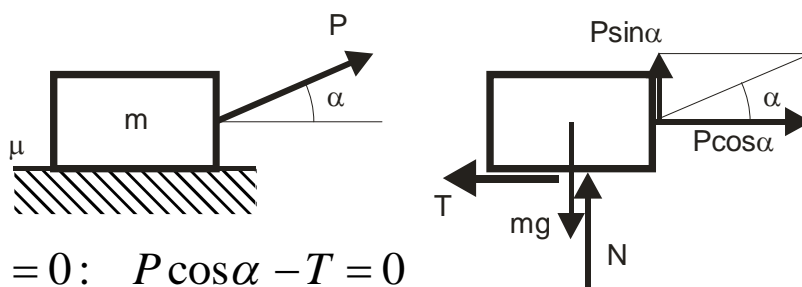
Stożek tarcia

- Linia działania wypadkowej reakcji zawarta jest wewnątrz, lub w przypadku tarcia całkowicie rozwiniętego, na powierzchni stożka nazywanego stożkiem tarcia.



11

Tarcie ślizgowe - przykład



$$\sum X = 0: P \cos \alpha - T = 0$$

$$\sum Y = 0: P \sin \alpha + N - m \cdot g = 0$$

■ Prawo tarcia: $T = \mu \cdot N$

$$N = m \cdot g - P \sin \alpha$$

$$\mu (m \cdot g - P \sin \alpha) = P \cos \alpha$$

$$P = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha}$$

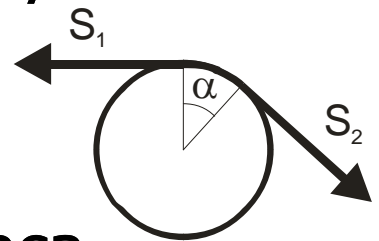
12

Tarcie cięgien o bloczek nieruchomy ⁽¹⁾

- Zależność między siłami w cięgnie przy całkowicie rozwiniętym tarcziu:

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}$$

gdzie S_1 jest siłą działającą w cięgnie w kierunku ewentualnego ruchu.



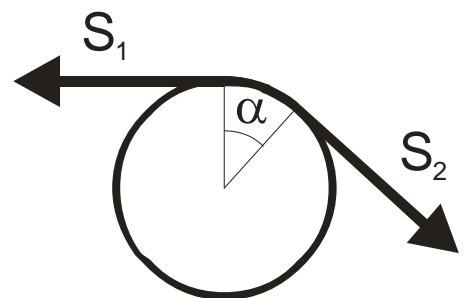
13

Tarcie cięgien o bloczek nieruchomy ⁽²⁾

- Zależność odwrotna:

$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu\alpha}$$

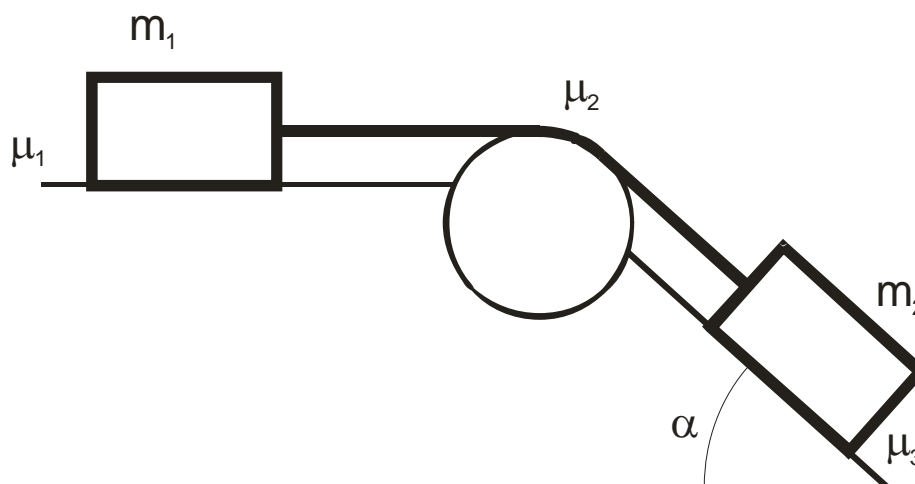
- Kąt α nazywany jest kątem opasania i musi być wyrażany w radianach.



14

Tarcie ciągien – przykład (1)

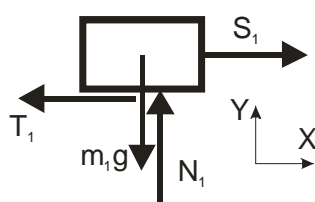
- Obliczyć masę graniczną m_2 , po przekroczeniu której rozpocznie się ruch. Miara kąta $\alpha = 30^\circ$.



15

Tarcie ciągien – przykład (2)

I

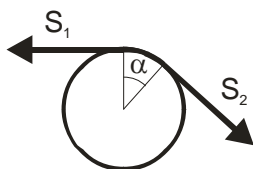


$$\sum X = 0: S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

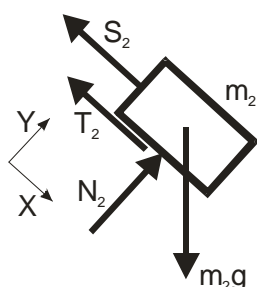
$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

II



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2 \alpha}$$

III



$$\sum X = 0: m_2 g \sin \alpha - S_2 - T_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0$$

$$T_2 = \mu_3 \cdot N_2$$

16

Przykład – rozwiązanie

$$\text{I } S_1 = T_1$$

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot N_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$\text{II } S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2 \alpha} \quad S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_2 \frac{\pi}{6}}$$

III

$$m_2 g \sin \alpha - S_2 - T_2 = 0$$

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha$$

$$T_2 = \mu_3 \cdot N_2 \quad m_2 = \frac{\mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_2 \frac{\pi}{6}}}{g \sin \alpha - \mu_3 \cdot g \cos \alpha}$$

17

Opór przy toczeniu

- W rzeczywistych układach, w przypadku ciał o przekrojach okrągłych, reakcja pionowa przesunięta jest w kierunku ewentualnego ruchu.
- Wynika to z nierównomiernego rozkładu sił pod ciałem. Mimo założenia kołowości przekroju, w rzeczywistości styk nie jest punktowy.

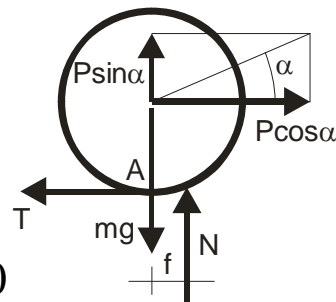
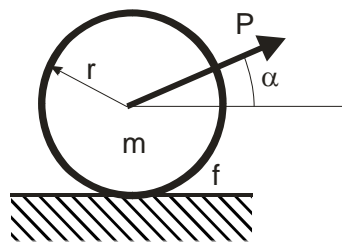
18

Wartości współczynnika oporu toczenia

Koło	Rodzaj podłoża	f [cm]
Drewno	Drewno	0,05-0,8
Drewno	Stal	0,03-0,04
Stal	Stal	0,001-0,005
Żeliwo	Żeliwo	0,005

19

Opór toczenia - przykład



$$\sum Y = 0: P \sin \alpha + N - m \cdot g = 0$$

$$\sum M_A = 0: P \cos \alpha \cdot r - N \cdot f = 0$$

$$N = m \cdot g - P \sin \alpha$$

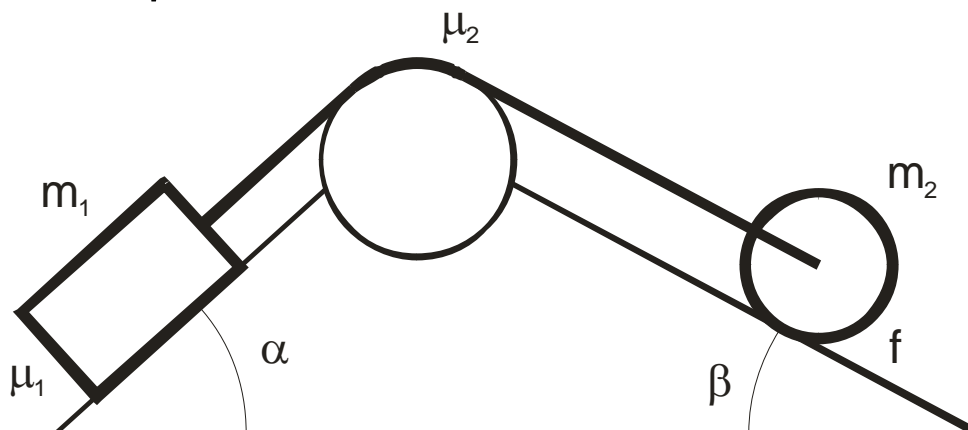
$$P \cos \alpha \cdot r - (m \cdot g - P \sin \alpha) \cdot f = 0$$

$$P = \frac{m \cdot g \cdot f}{r \cdot \cos \alpha + f \sin \alpha}$$

20

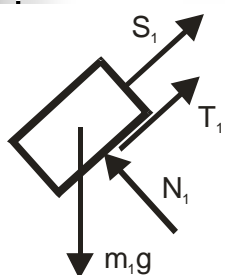
Przykład A

- Określić zakres, w jakim ma mieścić się wielkość masy m_2 , aby nie wystąpił ruch.
 $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$



21

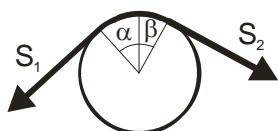
Przykład A – wariant I (ruch w lewo)



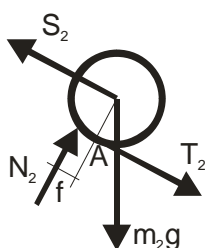
$$\sum X = 0: m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu_2(\alpha + \beta)}$$



$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos \beta = 0$$

$$\sum M_A = 0: N_2 \cdot f - S_2 \cdot r + m_2 g \sin \alpha \cdot r = 0$$

22

Wariant I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

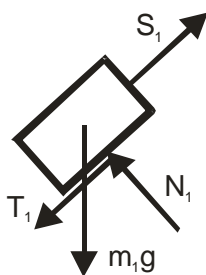
$$S_2 = (m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{-\mu_2(\alpha+\beta)}$$

$$N_2 = m_2 g \cos \beta$$

$$m_{2\min} = \frac{(m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{-\mu_2(\alpha+\beta)} \cdot r}{g \cos \beta \cdot f + g \sin \alpha \cdot r}$$

23

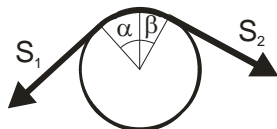
Przykład A – wariant II (ruch w prawo)



$$\sum X = 0: m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - S_1 + T_1 = 0$$

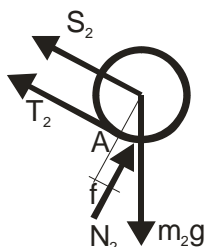
$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2(\alpha+\beta)}$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos \beta = 0$$



$$\sum M_A = 0: N_2 \cdot f + S_2 \cdot r - m_2 g \sin \alpha \cdot r = 0$$

24

Wariant II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_2 = (m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{\mu_2(\alpha+\beta)}$$

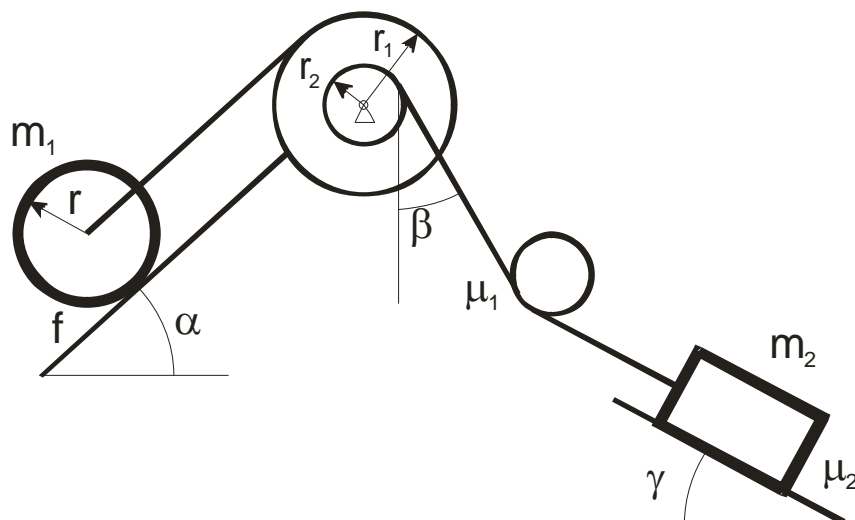
$$N_2 = m_2 g \cos \beta$$

$$m_{2\max} = \frac{(m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{\mu_2(\alpha+\beta)} \cdot r}{g \sin \alpha \cdot r - g \cos \beta \cdot f}$$

25

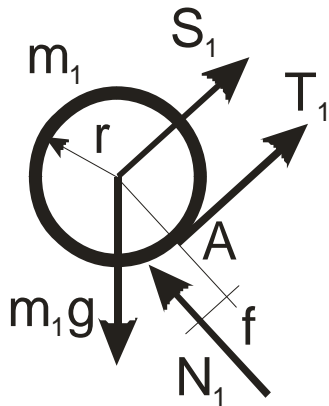
Przykład B-I (1)

- Określić maksimum masy m_1 , przy którym nie wystąpi jeszcze ruch.



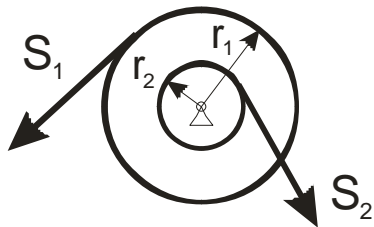
26

Przykład B-I (2)



$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$$

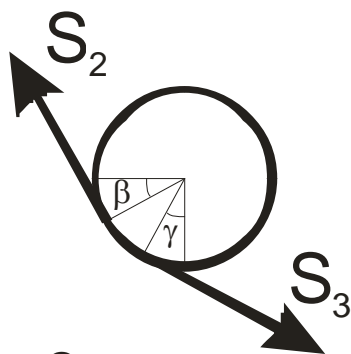
$$\sum M_A = 0: N_1 \cdot f + S_1 \cdot r - m_1 g \sin \alpha \cdot r = 0$$



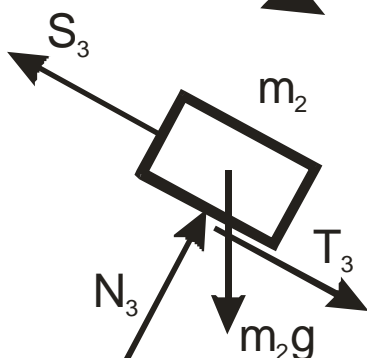
$$\sum M_o = 0: S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

27

Przykład B-I (3)



$$S_3 = S_2 \cdot e^{-\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$



$$\sum X = 0: m_2 \cdot g \cdot \sin \gamma - S_3 + T_3 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_3 - m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma = 0$$

$$T_3 = \mu_2 \cdot N_3$$

28

Przykład B-I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha \quad S_1 = \frac{m_1 g \sin \alpha \cdot r - m_1 g \cos \alpha \cdot f}{r}$$

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{m_1 g \sin \alpha \cdot r - m_1 g \cos \alpha \cdot f}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{-\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)} = \frac{m_1 g \sin \alpha \cdot r - m_1 g \cos \alpha \cdot f}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{-\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$

$$N_3 = m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma$$

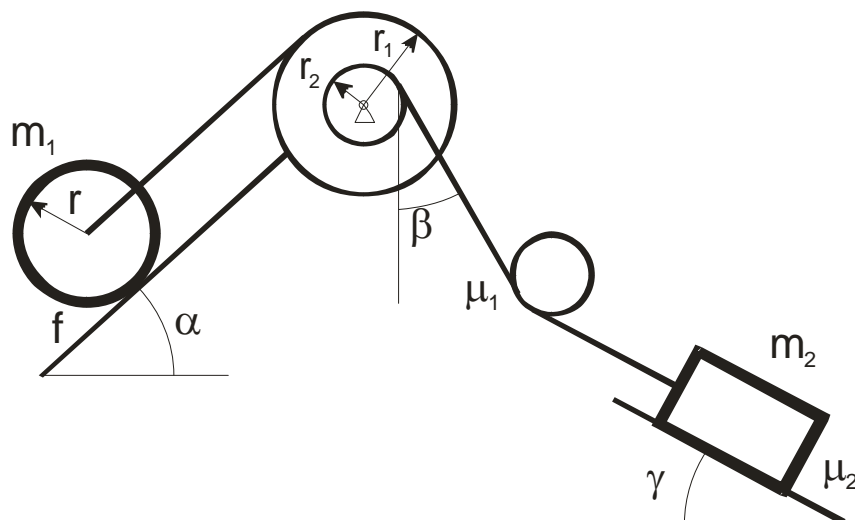
$$T_3 = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma$$

$$m_1 = \frac{(m_2 \cdot g \cdot \sin \gamma + \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma) \cdot r \cdot r_2 \cdot e^{\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}}{(g \sin \alpha \cdot r - g \cos \alpha \cdot f) \cdot r_1}$$

29

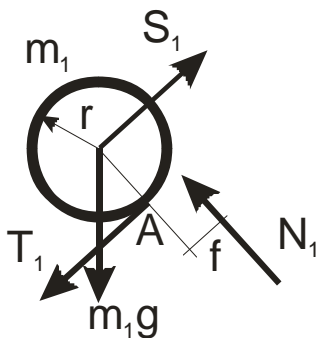
Przykład B-II (1)

- Określić minimum masy m_1 , przy którym nie wystąpi jeszcze ruch.



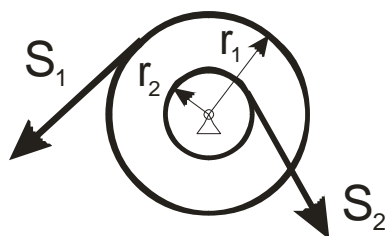
30

Przykład B-II (2)



$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$$

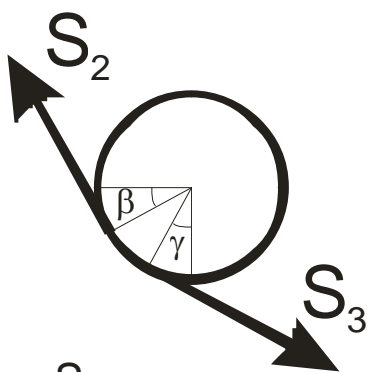
$$\sum M_A = 0: N_1 \cdot f - S_1 \cdot r + m_1 g \sin \alpha \cdot r = 0$$



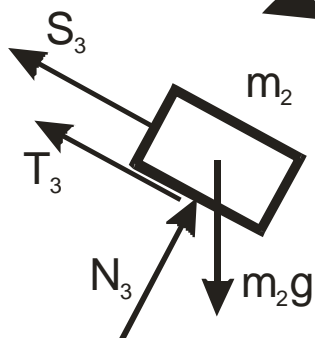
$$\sum M_O = 0: S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

31

Przykład B-II (3)



$$S_3 = S_2 \cdot e^{\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$



$$\sum X = 0: m_2 \cdot g \cdot \sin \gamma - S_3 - T_3 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_3 - m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma = 0$$

$$T_3 = \mu_2 \cdot N_3$$

32

Przykład B-II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha \quad S_1 = \frac{m_1 g \cos \alpha \cdot f + m_1 g \sin \alpha \cdot r}{r}$$

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{m_1 g \cos \alpha \cdot f + m_1 g \sin \alpha \cdot r}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)} = \frac{m_1 g \cos \alpha \cdot f + m_1 g \sin \alpha \cdot r}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$

$$N_3 = m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma$$

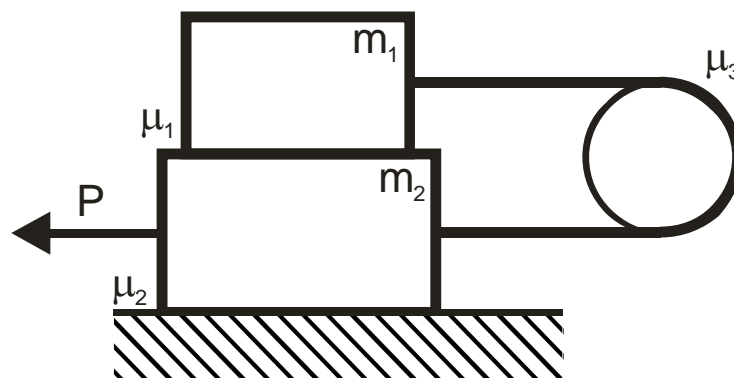
$$T_3 = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma$$

$$m_1 = \frac{(m_2 \cdot g \cdot \sin \gamma - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma) \cdot r \cdot r_2 \cdot e^{-\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}}{(g \cos \alpha \cdot f + g \sin \alpha \cdot r) \cdot r_1}$$

33

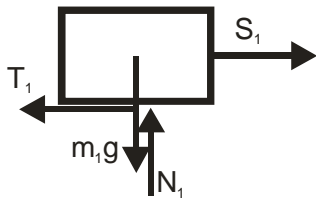
Przykład C-I (1)

- Określić graniczną wartość siły, przy przekroczeniu której może wystąpić ruch.



34

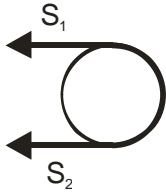
Przykład C-I (2)



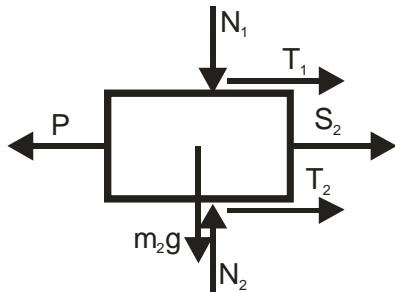
$$\sum X = 0: S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_3 \pi}$$



$$\sum X = 0: P - T_1 - T_2 - S_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 \cdot g - N_1 = 0$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

35

Przykład C-I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

$$N_2 = m_2 \cdot g + m_1 \cdot g$$

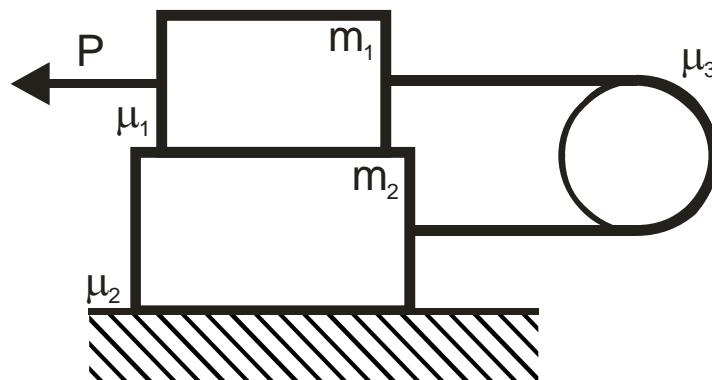
$$T_2 = \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$P = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g) + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

36

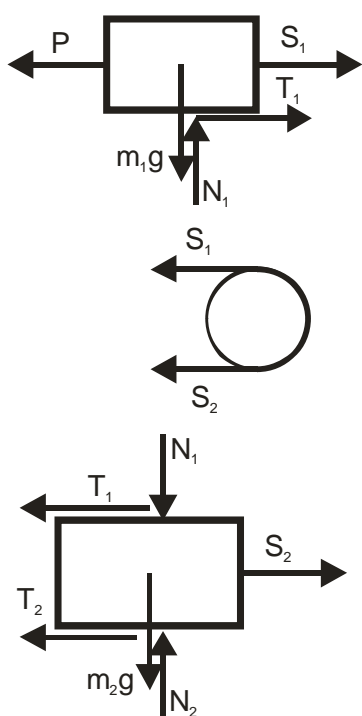
Przykład C-II (1)

- Określić graniczną wartość siły, przy przekroczeniu której może wystąpić ruch.



37

Przykład C-II (2)



$$\sum X = 0: P - S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu_3 \pi}$$

$$\sum X = 0: S_2 - T_1 - T_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 \cdot g - N_1 = 0$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

38

Przykład C-II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$N_2 = m_2 \cdot g + m_1 \cdot g$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$S_1 = (\mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)) \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

$$P = (\mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)) \cdot e^{\mu_3 \pi} + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$