

# Mechanika ogólna

Wykład nr 9

## Charakterystyki geometryczne figur płaskich.

1

## Charakterystyki geometryczne

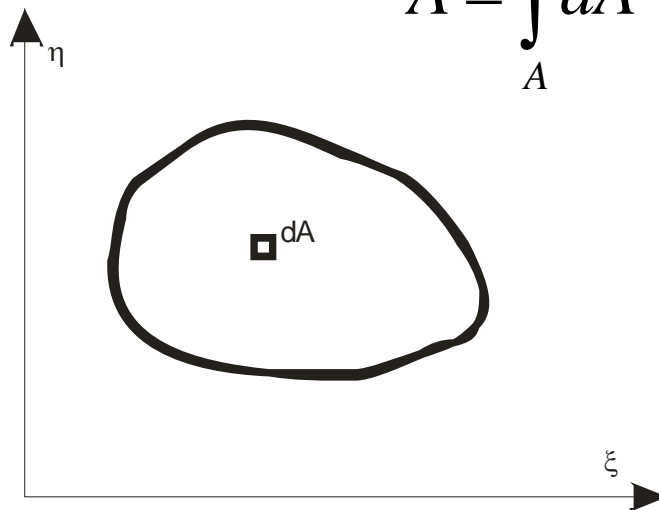
- Pole powierzchni.
- Moment statyczny
  - współrzędne środka ciężkości.
- Moment bezwładności.
- Moment odśrodkowy
  - główne centralne osie bezwładności.

2

# Pole powierzchni

- Pole powierzchni jako całka z pól elementarnych:

$$A = \int_A dA$$

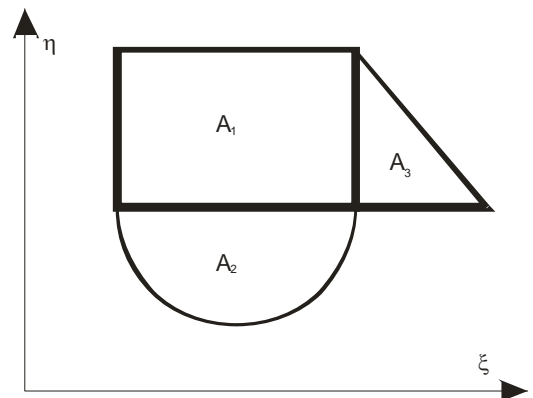


3

## Pole powierzchni figury złożonej

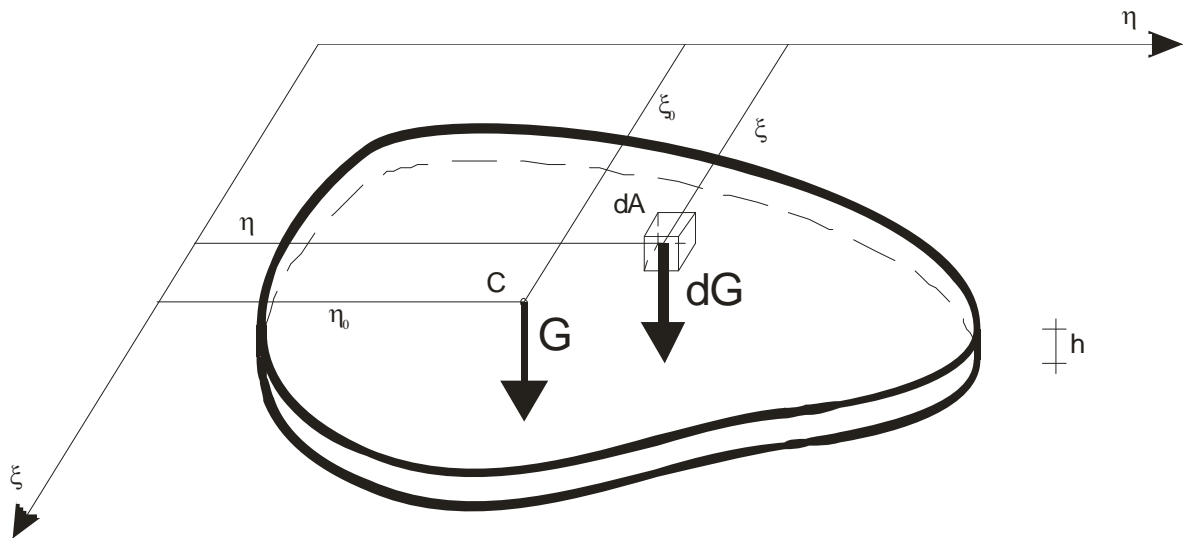
- Pole powierzchni figury złożonej z figur prostych równe jest sumie pól powierzchni figur składowych.

$$\begin{aligned} A &= \int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA + \dots + \int_{A_n} dA = \\ &= A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i \end{aligned}$$



4

# Masa a pole powierzchni



$$G = \int_A \gamma h dA = \gamma h \int_A dA = \gamma h A$$

5

## Środek ciężkości

- Moment siły wypadkowej względem osi równy jest sumie momentów sił składowych:

$$\gamma h \int_A \xi dA = \gamma h A \xi_0 \quad \xi_0 = \frac{\gamma h \int_A \xi dA}{\gamma h A} = \frac{\int_A \xi dA}{A}$$

$$\gamma h \int_A \eta dA = \gamma h A \eta_0 \quad \eta_0 = \frac{\gamma h \int_A \eta dA}{\gamma h A} = \frac{\int_A \eta dA}{A}$$

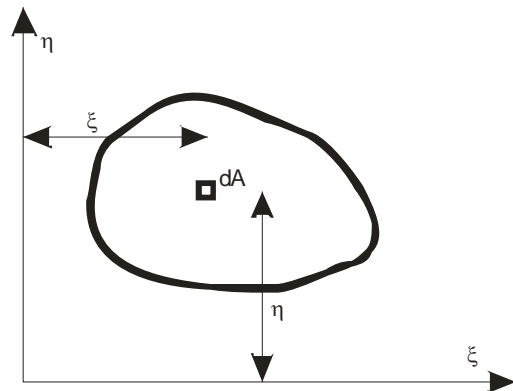
6

# Moment statyczny pola względem osi <sup>(1)</sup>

- Suma iloczynów elementarnych pól powierzchni  $dA$  przez ich współrzędną względem osi (odległość ze znakiem), obejmująca całe pole.

$$S_{\eta} = \int_A \xi dA = A \cdot \xi_0$$

$$S_{\xi} = \int_A \eta dA = A \cdot \eta_0$$



7

# Moment statyczny pola względem osi <sup>(2)</sup>

- Moment statyczny jest momentem rzędu pierwszego – współrzędna występuje w pierwszej potędze.
- Jednostką momentów statycznych jest jednostka długości w trzeciej potędze [ $m^3, cm^3, mm^3$ ].
- Znak momentu statycznego pola może być dodatni lub ujemny.

8

# Moment statyczny figur złożonych

- Moment statyczny figury złożonej z figur prostych równy jest sumie momentów statycznych figur prostych.

$$\begin{aligned} S_{\eta} &= \sum_{i=1}^n S_{\eta}^i = S_{\eta}^1 + S_{\eta}^2 + \dots + S_{\eta}^n = \\ &= A_1 \cdot \xi_1 + A_2 \cdot \xi_2 + \dots + A_n \cdot \xi_n = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \xi_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\xi} &= \sum_{i=1}^n S_{\xi}^i = S_{\xi}^1 + S_{\xi}^2 + \dots + S_{\xi}^n = \\ &= A_1 \cdot \eta_1 + A_2 \cdot \eta_2 + \dots + A_n \cdot \eta_n = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \eta_i \end{aligned}$$

9

# Współrzędne środka ciężkości

$$\xi_0 = \frac{\int \xi dA}{A} = \frac{S_{\eta}}{A}$$

$$\xi_0 = \frac{S_{\eta}}{A} = \frac{A_1 \cdot \xi_1 + A_2 \cdot \xi_2 + \dots + A_n \cdot \xi_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

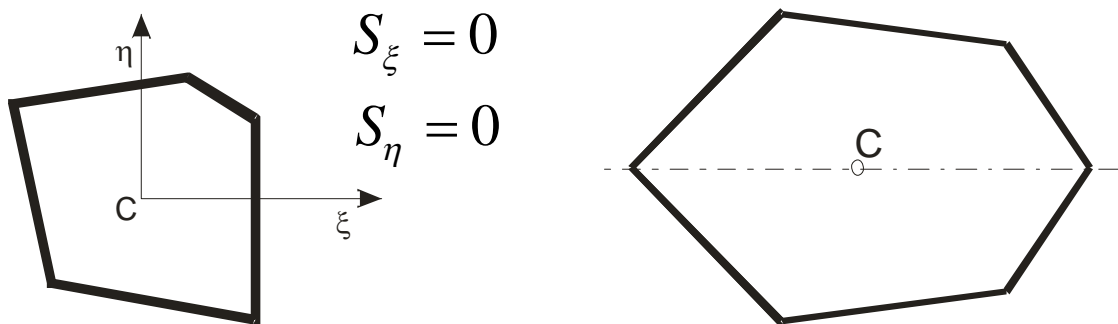
$$\eta_0 = \frac{\int \eta dA}{A} = \frac{S_{\xi}}{A}$$

$$\eta_0 = \frac{S_{\xi}}{A} = \frac{A_1 \cdot \eta_1 + A_2 \cdot \eta_2 + \dots + A_n \cdot \eta_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

10

## Osie środkowe <sup>(1)</sup>

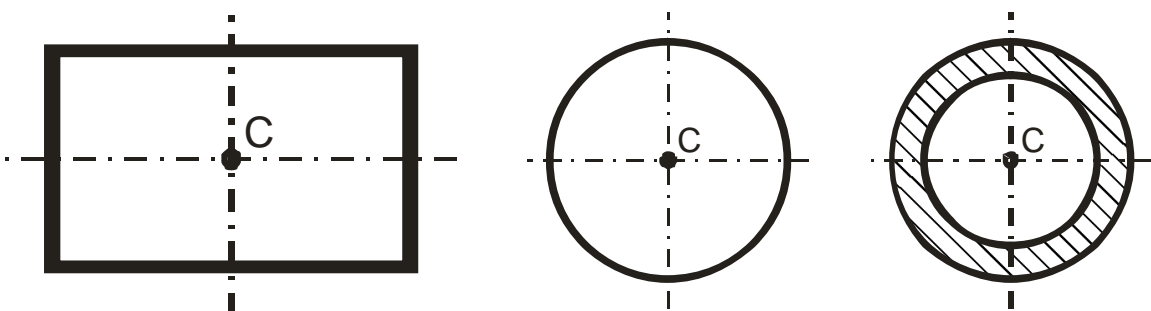
- Moment statyczny pola względem osi przechodzącej przez środek ciężkości równy jest 0.
- Jeżeli figura ma oś symetrii to środek ciężkości położony jest na niej.



11

## Osie środkowe <sup>(2)</sup>

- Jeżeli figura ma dwie osie symetrii to środek ciężkości położony jest na ich przecięciu.
- Jeżeli figura ma środek symetrii to jest on środkiem ciężkości.



12

# Moment bezwładności pola

- Momenty bezwładności pola są odpowiednikiem masowych momentów bezwładności stosowanych w dynamice brył.
- Momenty bezwładności – rzędu drugiego – kwadrat współrzędnej.
- Jednostką momentu bezwładności jest jednostka długości w czwartej potęgze [ $m^4$ ,  $cm^4$ ,  $mm^4$ ].
- Moment bezwładności jest zawsze  $>0$ .

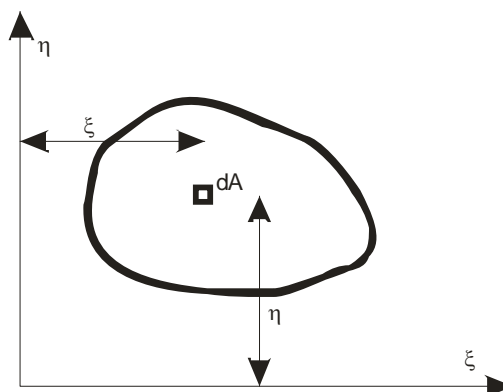
13

# Moment bezwładności pola względem osi

- Moment bezwładności pola względem osi jest sumą iloczynów elementarnych pól  $dA$  przez kwadraty ich odległości od osi (współrzędne na osi prostopadłej).

$$I_{\eta} = \int_A \xi^2 dA$$

$$I_{\xi} = \int_A \eta^2 dA$$

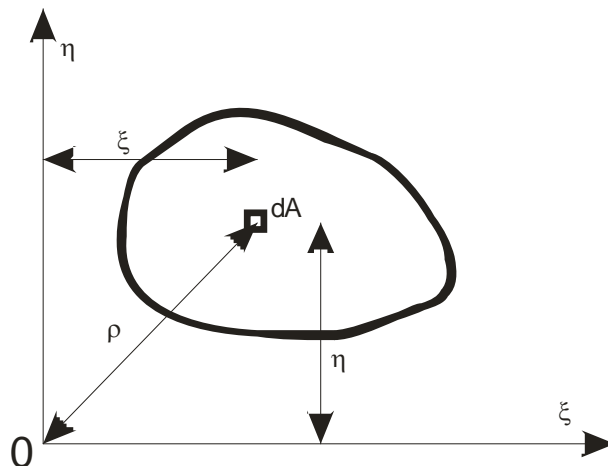


14

# Biegunowy moment bezwładności pola <sup>(1)</sup>

- Moment bezwładności pola względem punktu równy jest sumie iloczynów pól elementarnych  $dA$  przez kwadraty ich odległości od bieguna.

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA$$



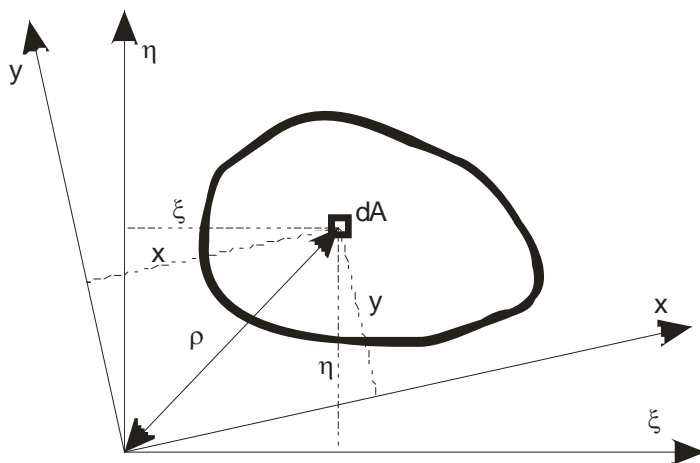
15

# Biegunowy moment bezwładności pola <sup>(2)</sup>

- Suma momentów bezwładności względem dwóch osi prostokątnego układu współrzędnych o początku w biegunie jest stała i równa biegunowemu momentowi bezwładności (niezależnie od obrotu osi).

16

# Biegunowy moment bezwładności pola <sup>(3)</sup>



$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$$

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_A (\xi^2 + \eta^2) dA = \int_A (x^2 + y^2) dA$$

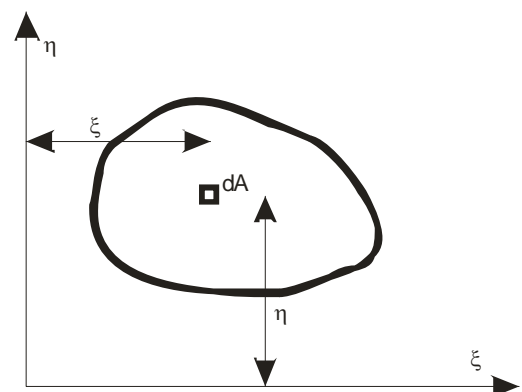
$$I_0 = \int_A \xi^2 dA + \int_A \eta^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_\eta + I_\xi = I_y + I_x$$

17

# Odśrodkowy moment bezwładności <sup>(1)</sup>

- Moment dewiacji, zбочzenia.
- Suma iloczynów elementarnych pól  $dA$  przez iloczyn współrzędnych obejmująca całe pole.

$$I_{\xi\eta} = \int_A \eta\xi dA$$



18

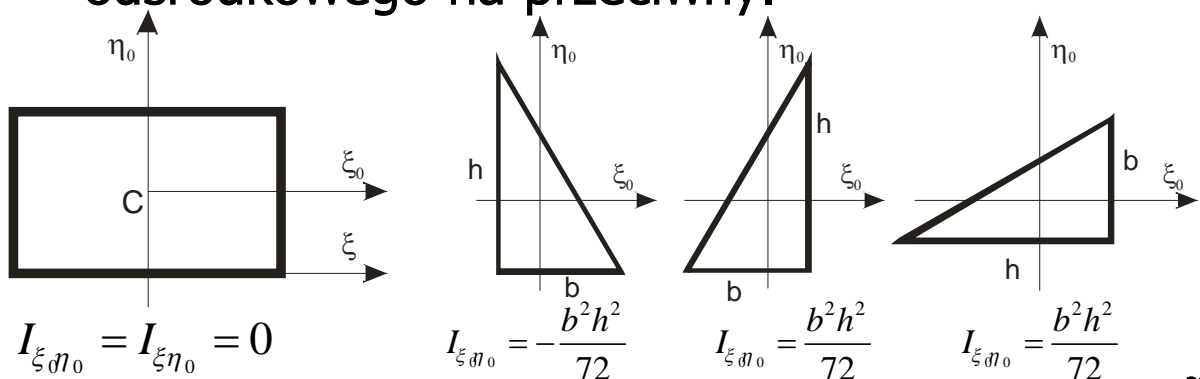
# Odśrodkowy moment bezwładności<sup>(2)</sup>

- Moment rzędu drugiego – iloczyn współrzędnych.
- Jednostką odśrodkowego momentu bezwładności jest jednostka długości w czwartej potęgze [ $m^4$ ,  $cm^4$ ,  $mm^4$ ].
- Znak momentu odśrodkowego może być dodatni lub ujemny.

19

# Odśrodkowy moment bezwładności<sup>(3)</sup>

- Moment odśrodkowy równy jest 0 jeżeli jedna z osi jest osią symetrii.
- Lustrzane odbicie figury lub obrót o  $90^\circ$  względem początku układu współrzędnych powoduje zmianę znaku momentu odśrodkowego na przeciwny.



20

# Momenty bezwładności pól figur złożonych

- Moment bezwładności figury złożonej z figur prostych równy jest sumie momentów bezwładności figur prostych:

– momenty bezwładności:

$$I_{\eta} = I_{\eta}^1 + I_{\eta}^2 + \dots + I_{\eta}^n = \sum_{i=1}^n I_{\eta}^i$$

$$I_{\xi} = I_{\xi}^1 + I_{\xi}^2 + \dots + I_{\xi}^n = \sum_{i=1}^n I_{\xi}^i$$

– odśrodkowy moment bezwładności:

$$I_{\xi\eta} = I_{\xi\eta}^1 + I_{\xi\eta}^2 + \dots + I_{\xi\eta}^n = \sum_{i=1}^n I_{\xi\eta}^i$$