Podać składowe wektora odkształceń elementu CST
Dane:

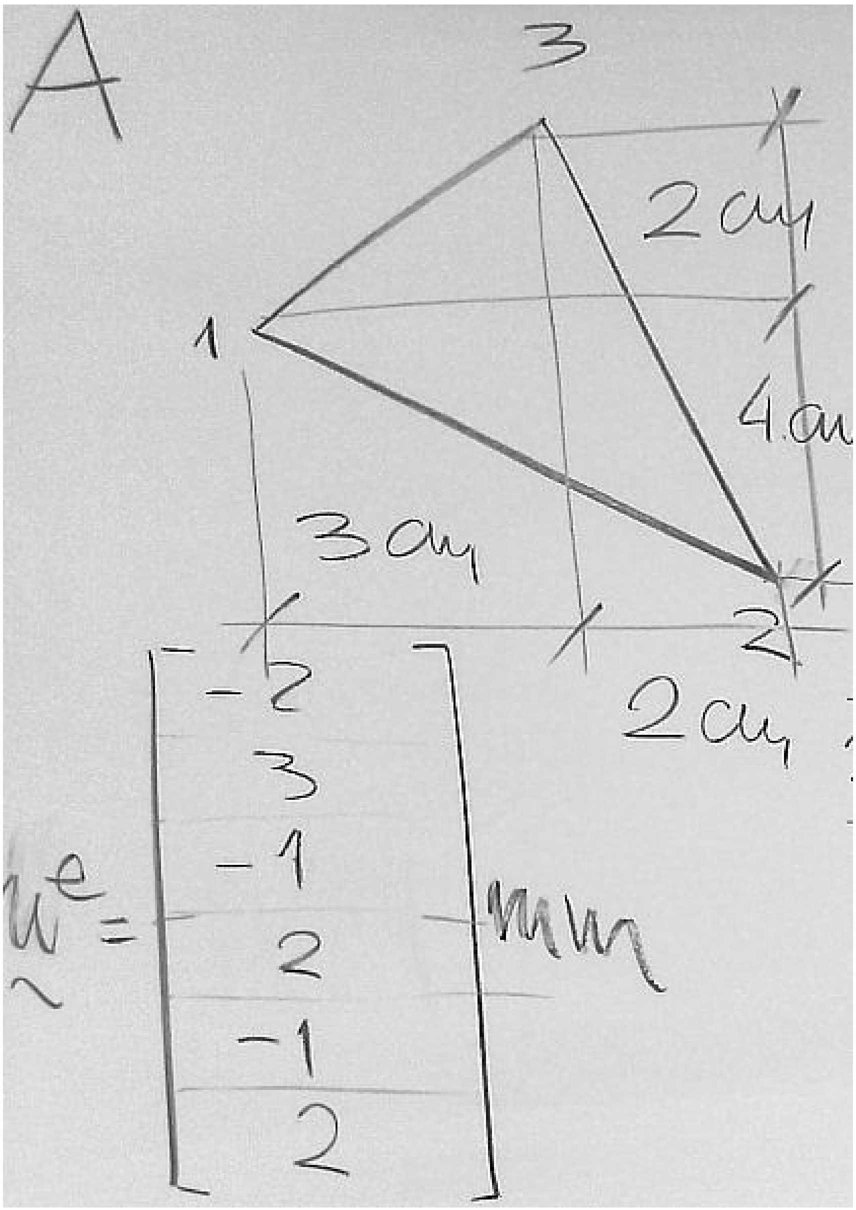
wektor współrzędnych elementu, cm

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \qquad x:=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix}\ \mathbf{cm}$$

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad y:=\begin{bmatrix}0\\-4\\2\end{bmatrix}\ \mathbf{cm}$$

wektor przemieszczeń elementu, (mm zamieniono na cm)

$$u:=\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\\2\\-1\\2\end{bmatrix}\ \mathbf{mm} \qquad ux:=\begin{bmatrix}u_1\\u_3\\u_5\end{bmatrix} \qquad uy:=\begin{bmatrix}u_2\\u_4\\u_6\end{bmatrix}$$



Przyjmujemy liniowe postacie funkcji kształtu:

$$N_w(x,y) = a_w + b_w \cdot x + c_w \cdot y$$ *- 3 równania funkcji kszkształtu dla węzłów w=1,2,3*

Węzeł nr 1 (w=1)

$$N_1(x,y) = a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y$$ *- równanie funkcji kształtu dla węzła 1*

Podstawiając współrzędne węzłów (j=1,2,3) elementu trójkątnego dostajemy 3 równania zgodności przemieszczeń, które służą do wyznaczenia współczynników funkcji kształtu

$$j := 1..3 \qquad N_1\left(x_j, y_j\right) = \delta_{1j}$$

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot y_1 &= 1 \\ a_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1 \cdot y_2 &= 0 \\ a_1 + b_1 \cdot x_3 + c_1 \cdot y_3 &= 0 \end{aligned}$$

lub w postaci macierzowej ----------->

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot \alpha 1 = \delta 1$$

Przyjmujemy oznaczenia:

$$M := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \qquad \alpha 1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \qquad \delta 1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

M - macierz współrzędnych węzłów elementu:
$\alpha 1$ - wektor współczynników funkcji kształtu
$\delta 1$ - wektor zgodności przemieszczeń

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

Ponieważ w dalszych obliczeniach potrzebne nam będą tylko współczynniki "b" i "c" to w celu ich wyznaczenia wygodnie będzie się posłużyć metodą G. Cramera (1750), która wymaga wyliczenia wartości 3 wyznaczników:

$W := |M| \qquad W = 22\ \mathbf{cm}^2$

$Wb = |Mb|$

$Wc = |Mc|$

Mb oznacza macierz, którą otrzymujemy zamieniając w macierzy M kolumnę nr 2 (która mnożona jest przez współczynnik b1) na prawą stronę równania, czyli $\delta 1$

$Mb := M \qquad j := 1..3 \quad Mb_{j,2} := \delta 1_j$

$$Mb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\ \mathbf{m} \\ 1 & 0 & -0.04\ \mathbf{m} \\ 1 & 0 & 0.02\ \mathbf{m} \end{bmatrix}$$

$Wb_1 := |Mb| = -6\ \mathbf{cm}$

$$b_1 := \frac{Wb_1}{W} = -27.27273\ \frac{1}{\mathbf{m}}$$

Mc jest macierzą, którą otrzymujemy zamieniając w macierzy M kolumnę nr 3 (która mnożona jest przez współczynnik c1) na prawą stronę równania, czyli $\delta 1$

$Mc := M \qquad j := 1..3 \quad Mc_{j,3} := \delta 1_j$

$$Mc = \begin{bmatrix} 1 & -0.03\ \mathbf{m} & 1 \\ 1 & 0.02\ \mathbf{m} & 0 \\ 1 & 0\ \mathbf{m} & 0 \end{bmatrix}$$

$Wc_1 := |Mc| = -2\ \mathbf{cm}$

$$c_1 := \frac{Wc_1}{W} = -9.09091\ \frac{1}{\mathbf{m}}$$

Podobnie postępujemy w przypadku funkcji kształtu dla węzłów 2 i 3

Węzeł 2:

$$M \cdot \alpha 2 = \delta 2 \qquad \alpha 2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad \delta 2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Mb := M \qquad j := 1..3 \quad Mb_{j,2} := \delta 2_j \qquad Mb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\ m \\ 1 & 1 & -0.04\ m \\ 1 & 0 & 0.02\ m \end{bmatrix}$$

$$Wb_2 := |Mb| = 2\ cm$$

$$b_2 := \frac{Wb_2}{W} = 9.09091\ \frac{1}{m}$$

$$Mc := M \qquad j := 1..3 \quad Mc_{j,3} := \delta 2_j \qquad Mc = \begin{bmatrix} 1 & -0.03\ m & 0 \\ 1 & 0.02\ m & 1 \\ 1 & 0\ m & 0 \end{bmatrix}$$

$$Wc_2 := |Mc| = -3\ cm$$

$$c_2 := \frac{Wc_2}{W} = -1.36364 \cdot 10\ \frac{1}{m}$$

Węzeł 3:

$$M \cdot \alpha 3 = \delta 3 \qquad \alpha 3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad \delta 3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Mb := M \qquad j := 1..3 \quad Mb_{j,2} := \delta 3_j \qquad Mb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\ m \\ 1 & 0 & -0.04\ m \\ 1 & 1 & 0.02\ m \end{bmatrix}$$

$$Wb_3 := |Mb| = 4\ cm$$

$$b_3 := \frac{Wb_3}{W} = (1.81818 \cdot 10)\ \frac{1}{m}$$

$$Mc := M \qquad j := 1..3 \quad Mc_{j,3} := \delta 3_j \qquad Mc = \begin{bmatrix} 1 & -0.03\ m & 0 \\ 1 & 0.02\ m & 0 \\ 1 & 0\ m & 1 \end{bmatrix}$$

$$Wc_3 := |Mc| = 5\ cm$$

$$c_3 := \frac{Wc_3}{W} = (2.27273 \cdot 10)\ \frac{1}{m}$$

Wyznaczenie składowych wektora odkształcenia

$$\varepsilon x := \sum_{j=1}^{3} \left(b_j \cdot ux_j\right) \qquad \varepsilon x = 2.7273 \cdot 10^{-2} \qquad \varepsilon_1 := \varepsilon x$$

$$\varepsilon y := \sum_{j=1}^{3} \left(c_j \cdot uy_j\right) \qquad \varepsilon y = -9.0909 \cdot 10^{-3} \qquad \varepsilon_2 := \varepsilon y$$

$$\gamma xy := \sum_{j=1}^{3} \left(c_j \cdot ux_j + b_j \cdot uy_j\right) \qquad \gamma xy = -1.8182 \cdot 10^{-2} \qquad \varepsilon_3 := \gamma xy$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 2.7273 \cdot 10^{-2} \\ -9.0909 \cdot 10^{-3} \\ -1.8182 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

==

Podsumowanie wyników

$$W = 22\ \mathbf{cm}^2 \qquad Wb = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \mathbf{cm} \qquad Wc = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \mathbf{cm}$$

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{cm} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{cm} \qquad ux = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{mm} \qquad uy = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{mm}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 2.7273 \cdot 10^{-2} \\ -9.0909 \cdot 10^{-3} \\ -1.8182 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} 2.7273 \\ -0.9091 \\ -1.8182 \end{bmatrix} 1\% \qquad W \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 60 \\ -20 \\ -40 \end{bmatrix} \mathbf{mm}^2$$