

*Podać składowe wektora odkształceń elementu CST*

*Dane:*

*wektor współrzędnych elementu, cm*

*wektor przemieszczeń elementu,  
(mm zamieniono na cm)*

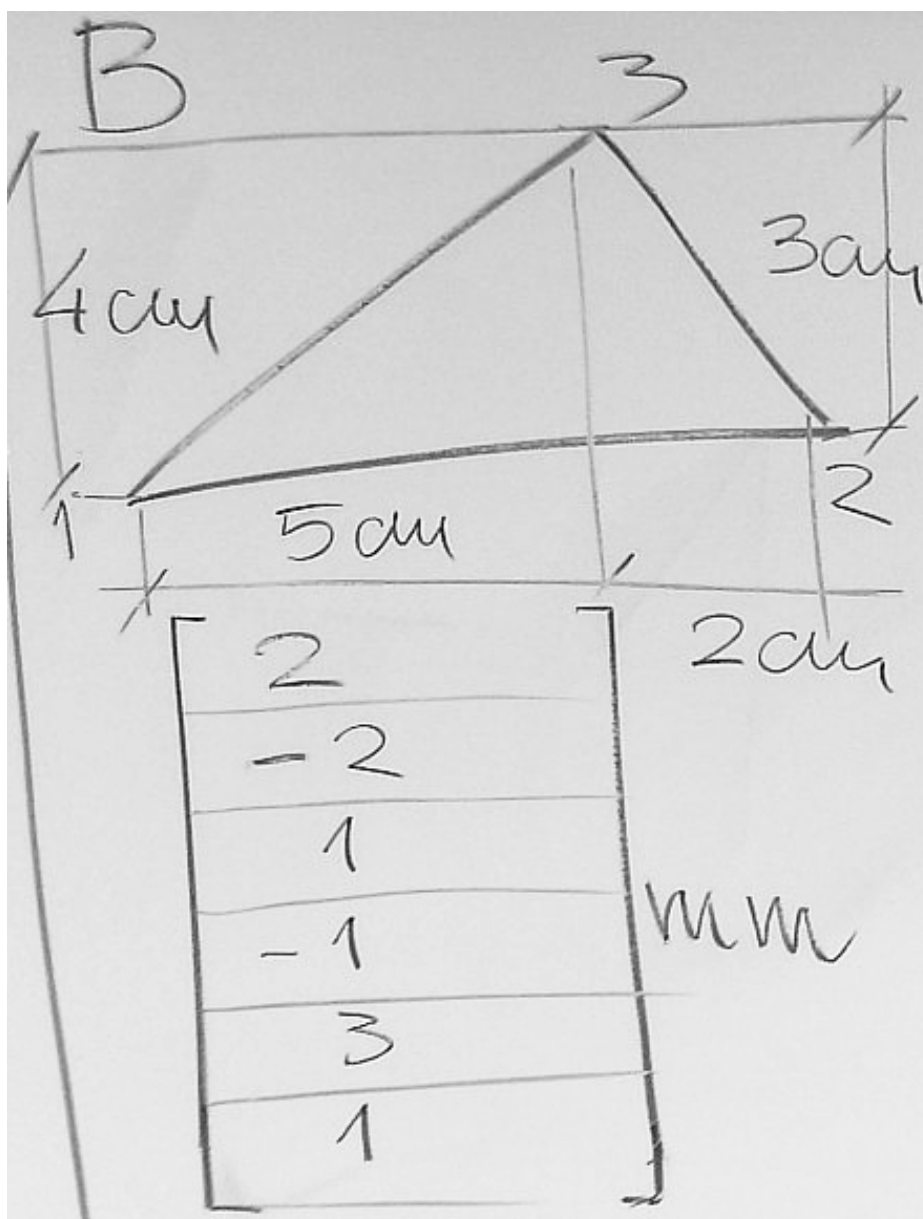
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

$$u := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$ux := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$uy := \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ u_6 \end{bmatrix}$$



Przyjmujemy liniowe postacie funkcji kształtu:

$$N_w(x, y) = a_w + b_w \cdot x + c_w \cdot y \quad - 3 \text{ równania funkcji kształtu dla węzłów } w=1,2,3$$

Węzeł nr 1 ( $w=1$ )

$$N_1(x, y) = a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y \quad - \text{równanie funkcji kształtu dla węzła 1}$$

Podstawiając współrzędne węzłów ( $j=1,2,3$ ) elementu trójkątnego dostajemy 3 równania zgodności przemieszczeń, które służą do wyznaczenia współczynników funkcji kształtu

$$j := 1 \dots 3 \quad N_1(x_j, y_j) = \delta_{1j}$$

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot y_1 &= 1 \\ a_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1 \cdot y_2 &= 0 \\ a_1 + b_1 \cdot x_3 + c_1 \cdot y_3 &= 0 \end{aligned}$$

lub w postaci  
macierzowej ----->

$$M \cdot \alpha_1 = \delta_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy oznaczenia:

$$M := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad \delta_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M$  - macierz współrzędnych węzłów elementu:

$\alpha_1$  - wektor współczynników funkcji kształtu

$\delta_1$  - wektor zgodności przemieszczeń

## Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

Ponieważ w dalszych obliczeniach potrzebne nam będą tylko współczynniki "b" i "c" to w celu ich wyznaczenia wygodnie będzie się posłużyć metodą G. Cramera (1750), która wymaga wyliczenia wartości 3 wyznaczników:



$$W := |M| \quad W = 23 \text{ cm}^2$$

$$Wb = |Mb|$$

$$Wc = |Mc|$$

$Mb$  oznacza macierz, którą otrzymujemy zamieniając w macierzy  $M$  kolumnę nr 2 (która mnożona jest przez współczynnik  $b_1$ ) na prawą stronę równania, czyli  $\delta_1$

$$Mb := M \quad j := 1..3 \quad Mb_{j,2} := \delta_1_j$$

$$Mb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0.01 & m \\ 1 & 0 & 0 & m \\ 1 & 0 & 0.03 & m \end{bmatrix}$$

$$Wb_1 := |Mb| = -3 \text{ cm}$$

$$b_1 := \frac{Wb_1}{W} = -13.04348 \frac{1}{m}$$

$Mc$  jest macierzą, którą otrzymujemy zamieniając w macierzy  $M$  kolumnę nr 3 (która mnożona jest przez współczynnik  $c_1$ ) na prawą stronę równania, czyli  $\delta_1$

$$Mc := M \quad j := 1..3 \quad Mc_{j,3} := \delta_1_j$$

$$Mc = \begin{bmatrix} 1 & -0.05 & m & 1 \\ 1 & 0.02 & m & 0 \\ 1 & 0 & m & 0 \end{bmatrix}$$

$$Wc_1 := |Mc| = -2 \text{ cm}$$

$$c_1 := \frac{Wc_1}{W} = -8.69565 \frac{1}{m}$$

Podobnie postępujemy w przypadku funkcji kształtu dla węzłów 2 i 3

Węzeł 2:

$$M \cdot \alpha_2 = \delta_2 \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \delta_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Mb := M \quad j := 1..3 \quad Mb_{j,2} := \delta_{2,j} \quad Mb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.01 & m \\ 1 & 1 & 0 & m \\ 1 & 0 & 0.03 & m \end{bmatrix}$$

$$Wb_2 := |Mb| = 4 \text{ cm}$$

$$b_2 := \frac{Wb_2}{W} = (1.73913 \cdot 10) \frac{1}{m}$$

$$Mc := M \quad j := 1..3 \quad Mc_{j,3} := \delta_{2,j} \quad Mc = \begin{bmatrix} 1 & -0.05 & m & 0 \\ 1 & 0.02 & m & 1 \\ 1 & 0 & m & 0 \end{bmatrix}$$

$$Wc_2 := |Mc| = -5 \text{ cm}$$

$$c_2 := \frac{Wc_2}{W} = -2.17391 \cdot 10 \frac{1}{m}$$

Węzeł 3:

$$M \cdot \alpha_3 = \delta_3 \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \delta_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Mb := M \quad j := 1..3 \quad Mb_{j,2} := \delta_{3,j} \quad Mb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.01 & m \\ 1 & 0 & 0 & m \\ 1 & 1 & 0.03 & m \end{bmatrix}$$

$$Wb_3 := |Mb| = -1 \text{ cm}$$

$$b_3 := \frac{Wb_3}{W} = -4.34783 \frac{1}{m}$$

$$Mc := M \quad j := 1..3 \quad Mc_{j,3} := \delta_{3,j} \quad Mc = \begin{bmatrix} 1 & -0.05 & m & 0 \\ 1 & 0.02 & m & 0 \\ 1 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}$$

$$Wc_3 := |Mc| = 7 \text{ cm}$$

$$c_3 := \frac{Wc_3}{W} = (3.04348 \cdot 10) \frac{1}{m}$$

### Wyznaczenie składowych wektora odkształcenia

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &:= \sum_{j=1}^3 (b_j \cdot ux_j) & \varepsilon_x &= -2.1739 \cdot 10^{-2} & \varepsilon_1 &:= \varepsilon_x \\ \varepsilon_y &:= \sum_{j=1}^3 (c_j \cdot uy_j) & \varepsilon_y &= 6.9565 \cdot 10^{-2} & \varepsilon_2 &:= \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} &:= \sum_{j=1}^3 (c_j \cdot ux_j + b_j \cdot uy_j) & \gamma_{xy} &= 5.6522 \cdot 10^{-2} & \varepsilon_3 &:= \gamma_{xy}\end{aligned}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -2.1739 \cdot 10^{-2} \\ 6.9565 \cdot 10^{-2} \\ 5.6522 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

### Podsumowanie wyników

$$W = 23 \text{ cm}^2 \quad Wb = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad Wc = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

$$x = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad ux = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ mm} \quad uy = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -2.1739 \cdot 10^{-2} \\ 6.9565 \cdot 10^{-2} \\ 5.6522 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} -2.1739 \\ 6.9565 \\ 5.6522 \end{bmatrix} 1\% \quad W \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} -50 \\ 160 \\ 130 \end{bmatrix} \text{ mm}^2$$

