

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok_A11}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_B11} (EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_C11} (EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok_C01}(EA, EJ, L, 1) := \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\text{Blok_A01}(EA, EJ, L, 1) := \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array}$$

$$\text{Blok_B01}(EA, EJ, L, 1) := \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok_B10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\text{Blok_A10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_C10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Wyznaczyć składowe macierzy sztywności elementów ramy płaskiej.
 Podać postacie bloków A, B i C macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

Układ bloków macierzy sztywności elementu $K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$

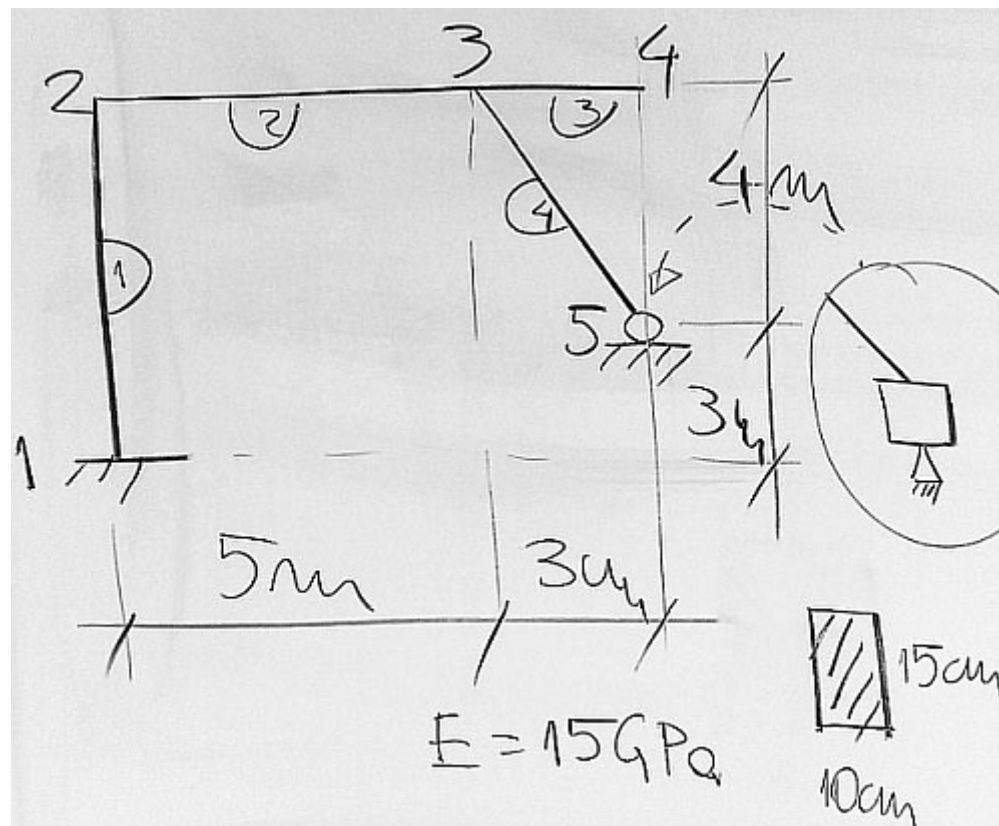
$$E := 15 \text{ GPa} \quad b := 10 \text{ cm} \quad h := 15 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad A := b \cdot h \quad EA := E \cdot A \quad EJ := E \cdot J$$

$$EA = 225.000 \cdot \text{MN} \quad EJ = 421.875 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$

Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$K = \begin{bmatrix} \overset{1}{A^1} & \overset{2}{C^1} & & & \\ & \overset{2}{B^1+A^2} & \overset{3}{C^2} & & \\ & & \overset{3}{B^2+A^3+A^4} & \overset{4}{C^3} & \overset{5}{C^4} \\ & & & \overset{4}{B^3} & \\ \text{Symetria} & & & & \overset{5}{B^4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$



Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$L_x := 0\text{m} \quad L_y := 7\text{m} \quad L := \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2} = 7.000000\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 32142.857 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 14.759 & 51.658 \\ 0.000 & 51.658 & 241.071 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 32142.857 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 14.759 & -51.658 \\ 0.000 & -51.658 & 241.071 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -32142.857 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -14.759 & 51.658 \\ 0.000 & -51.658 & 120.536 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 5\text{m} \quad \underline{L_y} := 0\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 5\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 40.500 & 101.250 \\ 0.000 & 101.250 & 337.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 40.500 & -101.250 \\ 0.000 & -101.250 & 337.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -40.500 & 101.250 \\ 0.000 & -101.250 & 168.750 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 3\text{m} \quad \underline{L_y} := 0\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 3\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 75000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 187.500 & 281.250 \\ 0.000 & 281.250 & 562.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 75000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 187.500 & -281.250 \\ 0.000 & -281.250 & 562.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -75000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -187.500 & 281.250 \\ 0.000 & -281.250 & 281.250 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 3\text{m} \quad \underline{L_y} := -4\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 5\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 40.500 & 101.250 \\ 0.000 & 101.250 & 337.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 40.500 & -101.250 \\ 0.000 & -101.250 & 337.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -40.500 & 101.250 \\ 0.000 & -101.250 & 168.750 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$