Statyka kratownicy drewnianej o 3 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami, wilgocią i ciężarem własnym

$ORIGIN := 1$ *- ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 10GPa$ *- moduł Younga drewna*

$\alpha w := 1.0 \cdot 10^{-5}$ *- współczynnik rozszerzalności wilgotnościowej*

$\rho := 700 \frac{kg}{m^3}$ *- gęstość drewna* $\gamma := \rho \cdot g$ *- ciężar właściwy drewna* $g = 9.80665 \frac{m}{s^2}$ *- przyspieszenie ziemskie - stała predefiniowana w MathCadzie*

Wymiary przekrojów prętów (prostokąty bxh*)*

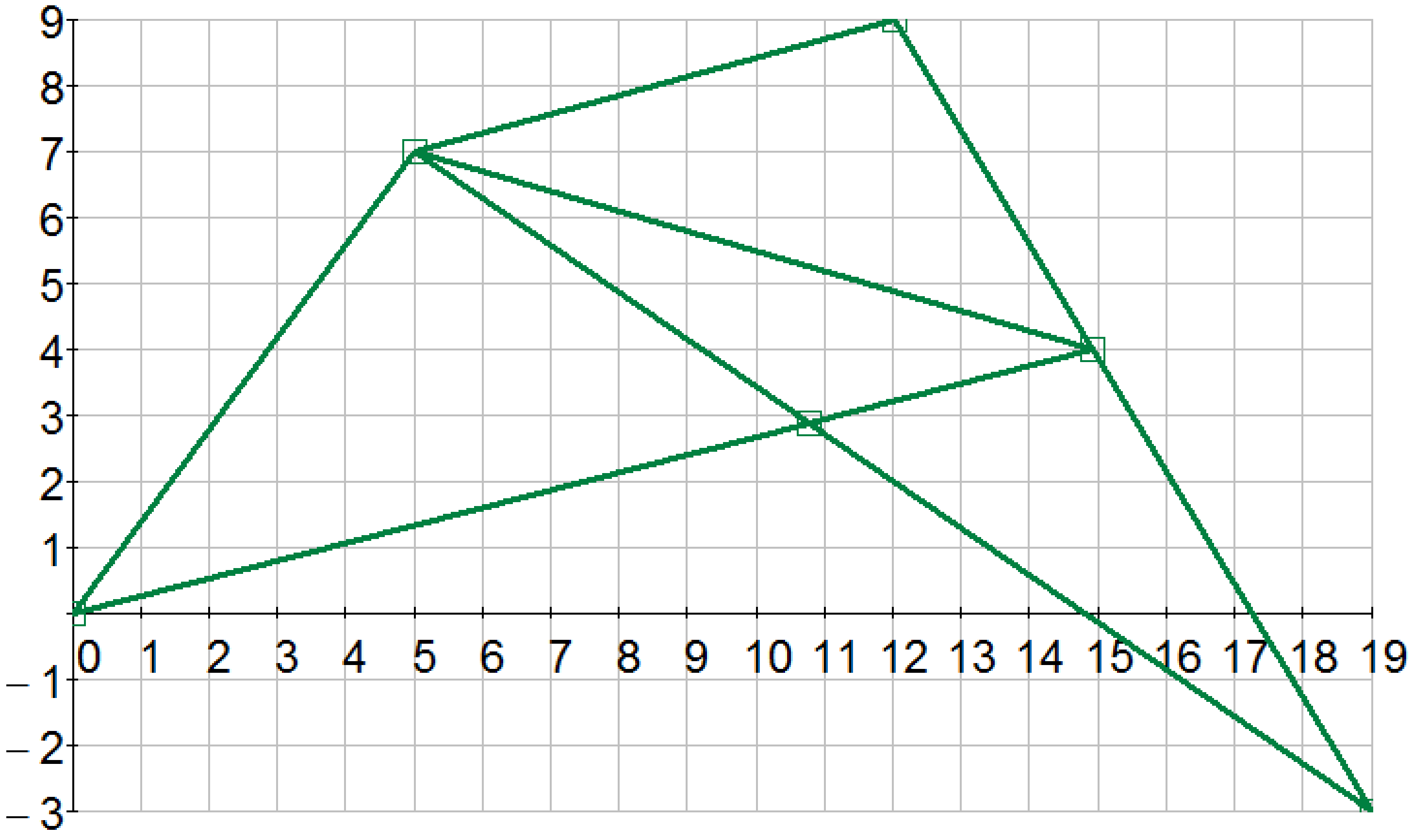
$b1 := 6cm$ $b2 := 6cm$ $b3 := 5cm$

$h1 := 12cm$ $h2 := 10cm$ $h3 := 8cm$

$A1 := b1 \cdot h1$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 1...3* $A1 = 72 \cdot cm^2$

$A2 := b2 \cdot h2$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 4...6* $A2 = 60 \cdot cm^2$

$A3 := b3 \cdot h3$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 7...10* $A3 = 40 \cdot cm^2$



$\Delta W5 := 20$

$\Delta W7 := 30$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X5 := 19 - \frac{7 \cdot 7}{12}$$

$Y4 := 3 \qquad X4 := 11$ *- przybliżone wartości współrzędnych*

$$Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A3 \end{pmatrix} \quad W := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta W5 \\ 0 \\ \Delta W7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \\ X4 \\ X5 \\ 19 \end{pmatrix} m \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \\ Y4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} m$$

$$t5 := \frac{Y_5}{X_5} \qquad t6 := \frac{Y_2 - Y_6}{X_6 - X_2} \qquad X_4 := \frac{Y_6 + t6 \cdot X_6}{t5 + t6} \qquad Y_4 := \frac{Y_5}{X_5} \cdot X_4$$

- wyliczone prawdziwe wartości współrzędnych

$X_4 = 10.760357\, m$

$Y_4 = 2.885459\, m$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := rows(Wp)$ *- Liczba elementów* $\qquad Le = 9$

$Lw := rows(X)$ *- Liczba węzłów* $\qquad Lw = 6$

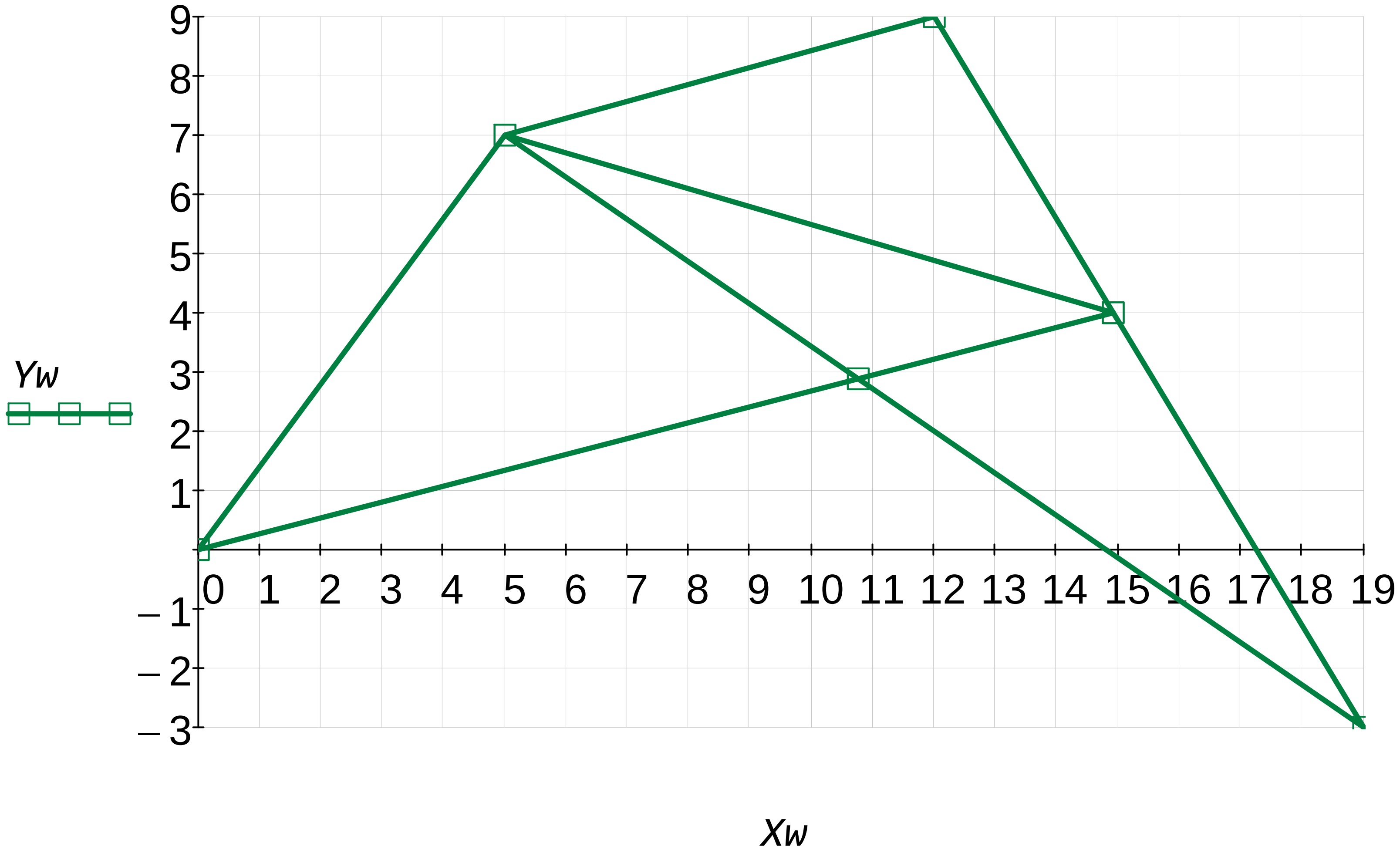
$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań* $\qquad Lr = 12$

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$e := 1 .. \ Le$

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych



Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)} \qquad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)} \qquad L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

$Lx =$ (m)

	1
1	5.000
2	7.000
3	2.917
4	4.083
5	10.760
6	4.156
7	8.240
8	5.760
9	9.917

$Ly =$ (m)

	1
1	7.000
2	2.000
3	-5.000
4	-7.000
5	2.885
6	1.115
7	-5.885
8	-4.115
9	-3.000

$L =$ (m)

	1
1	8.602
2	7.280
3	5.789
4	8.104
5	11.141
6	4.303
7	10.126
8	7.079
9	10.361

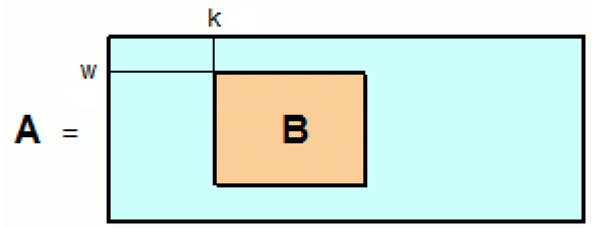
$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2827.6 & 3958.7 \\ 3958.7 & 5542.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_7 = \begin{pmatrix} 3923.6 & -2802.6 \\ -2802.6 & 2001.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

```
LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony
blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony
blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej
macierzy A,
```



$$LBM(A, B, w, k) := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\ rows(B) \\ \quad \text{for } j \in 1..\ cols(B) \\ \quad\quad A_{w+i-1,\, k+j-1} \leftarrow B_{i,j} \\ A \end{array}\right.$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1 \quad k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

$K =$ (in $\frac{kN}{m}$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	7852	5306	-2828	-3959	0	0	-5024	-1347	0	0	0	0
2	5306	5903	-3959	-5542	0	0	-1347	-361	0	0	0	0
3	-2828	-3959	21121	1492	-9144	-2612	-5612	4009	-3537	1070	0	0
4	-3959	-5542	1492	9476	-2612	-746	4009	-2863	1070	-324	0	0
5	0	0	-9144	-2612	12301	-2801	0	0	-3158	5414	0	0
6	0	0	-2612	-746	-2801	10027	0	0	5414	-9280	0	0
7	-5024	-1347	-5612	4009	0	0	27568	-1976	-13008	-3488	-3924	2803
8	-1347	-361	4009	-2863	0	0	-1976	6162	-3488	-935	2803	-2002
9	0	0	-3537	1070	-3158	5414	-13008	-3488	21959	-6862	-2256	3867
10	0	0	1070	-324	5414	-9280	-3488	-935	-6862	17168	3867	-6629
11	0	0	0	0	0	0	-3924	2803	-2256	3867	6179	-6669
12	0	0	0	0	0	0	2803	-2002	3867	-6629	-6669	8631

$$\left| K \cdot \frac{m}{kN} \right| = 0.000000000000 \times 10^{0}$$

Globalna macierz sztywności **K** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* |**K**|=0

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych

$pP_{Lr} := 0kN$

$P2 := 7kN$ $\quad P3 := 8kN$ $\quad P5 := 8kN$

$\alpha 2 := 20deg$ $\quad \alpha 3 := 50deg$ $\quad \alpha 5 := 20deg$

$pP_3 := P2 \cdot sin(\alpha 2)$

$pP_4 := -P2 \cdot cos(\alpha 2)$

$pP_5 := -P3 \cdot sin(\alpha 3)$

$pP_6 := -P3 \cdot cos(\alpha 3)$

$pP_9 := -P5 \cdot sin(\alpha 5)$

$pP_{10} := -P5 \cdot cos(\alpha 5)$

$pP =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	2.394
4	-6.578
5	-6.128
6	-5.142
7	0.000
8	0.000
9	-2.736
10	-7.518
11	0.000
12	0.000

$\cdot kN$

Wektory obciążeń wywolanych zmianą wilgotności elementów

$$t_e := \alpha w \cdot W_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix}$$

$pTo_{Lr} := 0$

Agregacja globalnego wektora obciążeń wilgotnościowych

$$pT := \sum_e \left(LBM\left(pTo, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(pTo, t_e, k_e, 1\right)\right)$$

Wektory obciążeń grawitacyjnych

$$q_e := \frac{A_e \cdot L_e \cdot \gamma}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad pGo_{Lr} := 0$$

Agregacja globalnego wektora obciążeń grawitacyjnych

$$pG := \sum_e \left(LBM\left(pGo, q_e, n_e, 1\right) + LBM\left(pGo, q_e, k_e, 1\right)\right)$$

$p := pP - pT + pG$ **p** *- Wektor prawej strony układu równań*

Kopiowanie Macierzy **K** *i wektora* **p** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K0 := K$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$ *- globalne numery przemieszczeń blokowanych na podporach*

$j := 1 .. \ rows(s) \qquad i := 1 .. \ cols(K)$

$K_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy* $p_{(s_j)} := 0$

$K_{s_j, s_j} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-2827.6	-3958.7	21120.7	1492.2	-9143.5	-2612.4	-5612.4	4008.9	-3537.1	1070.0	0.0	0.0
4	-3958.7	-5542.2	1492.2	9475.8	-2612.4	-746.4	4008.9	-2863.5	1070.0	-323.7	0.0	0.0
5	0.0	0.0	-9143.5	-2612.4	12301.5	-2801.2	0.0	0.0	-3157.9	5413.6	0.0	0.0
6	0.0	0.0	-2612.4	-746.4	-2801.2	10026.9	0.0	0.0	5413.6	-9280.5	0.0	0.0
7	-5024.4	-1347.3	-5612.4	4008.9	0.0	0.0	27568.4	-1976.0	-13007.9	-3488.2	-3923.6	2802.6
8	-1347.3	-361.3	4008.9	-2863.5	0.0	0.0	-1976.0	6162.0	-3488.2	-935.4	2802.6	-2001.9
9	0.0	0.0	-3537.1	1070.0	-3157.9	5413.6	-13007.9	-3488.2	21958.6	-6862.4	-2255.7	3866.9
10	0.0	0.0	1070.0	-323.7	5413.6	-9280.5	-3488.2	-935.4	-6862.4	17168.5	3866.9	-6628.9
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

$\cdot \frac{kN}{m}$

$p =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	2.394
4	-7.258
5	-6.128
6	-5.465
7	-3.057
8	12.898
9	-2.736
10	-8.092
11	0.000
12	0.000

$\cdot kN$

$$\left| K \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 4.7921801813 \times 10^{31}$$

- wyznacznik macierzy $\mathbf{K}_o$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

Rozwiązanie układu równań:

$u := lsolve(K, p)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$u =$

	1
1	0.000000
2	0.000000
3	-1.535255
4	-0.258335
5	-1.788191
6	-2.429780
7	-0.520347
8	2.434371
9	-0.324248
10	-1.232761
11	0.000000
12	0.000000

$\cdot mm$

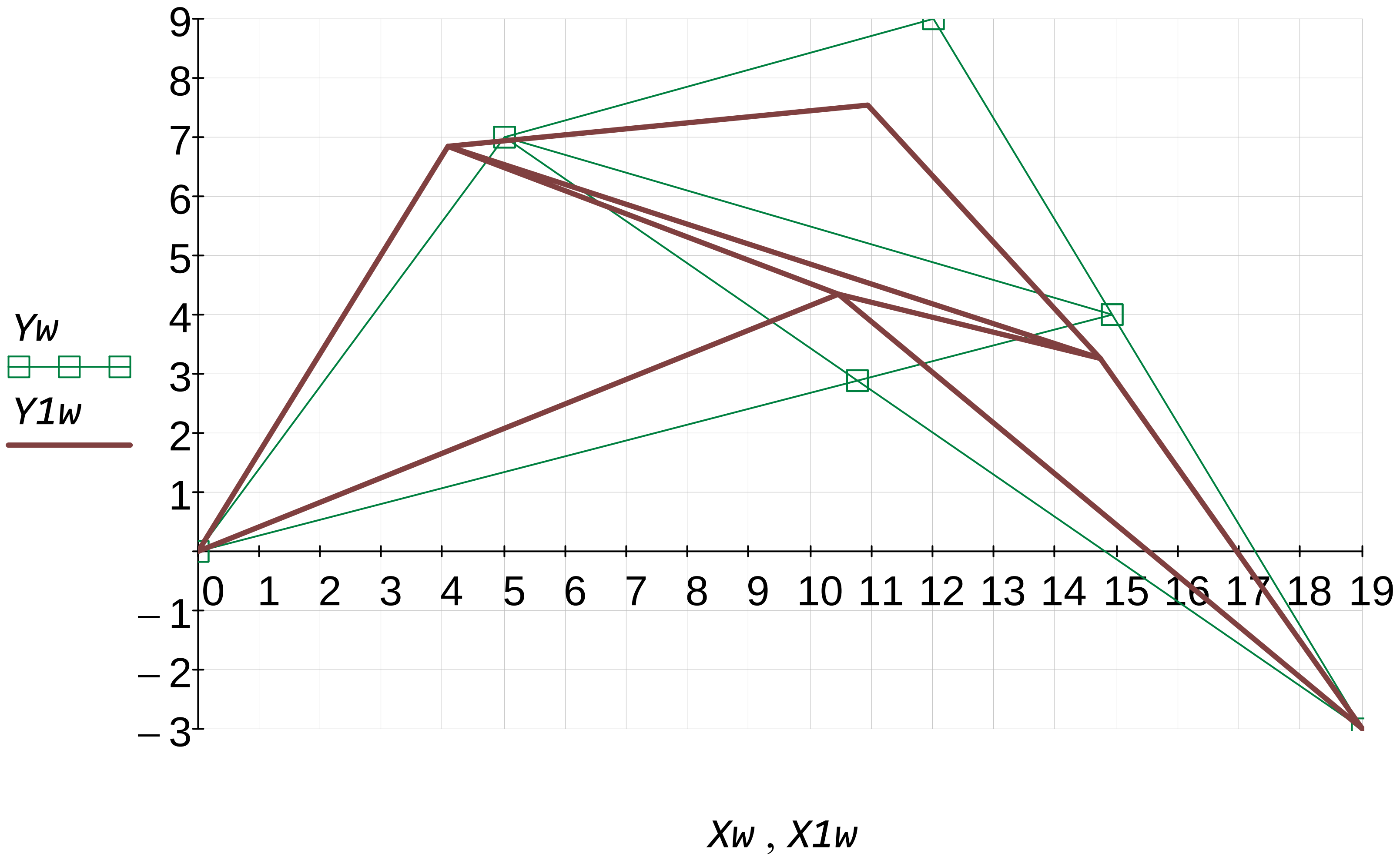
$p =$

	1
1	0.000000
2	0.000000
3	2.394141
4	-7.258373
5	-6.128356
6	-5.465263
7	-3.056693
8	12.897999
9	-2.736161
10	-8.091723
11	0.000000
12	0.000000

$\cdot kN$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 600$



Yw - krata nieodkształcona
Y1w - krata odkształcona

Obliczenie reakcji podpór

$$r := K0 \cdot u - (pP + pG - pT)$$

$r =$

	1
1	16.289
2	10.881
3	-0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	-0.000
8	-0.000
9	-0.000
10	0.000
11	-9.818
12	11.458

$\cdot kN$

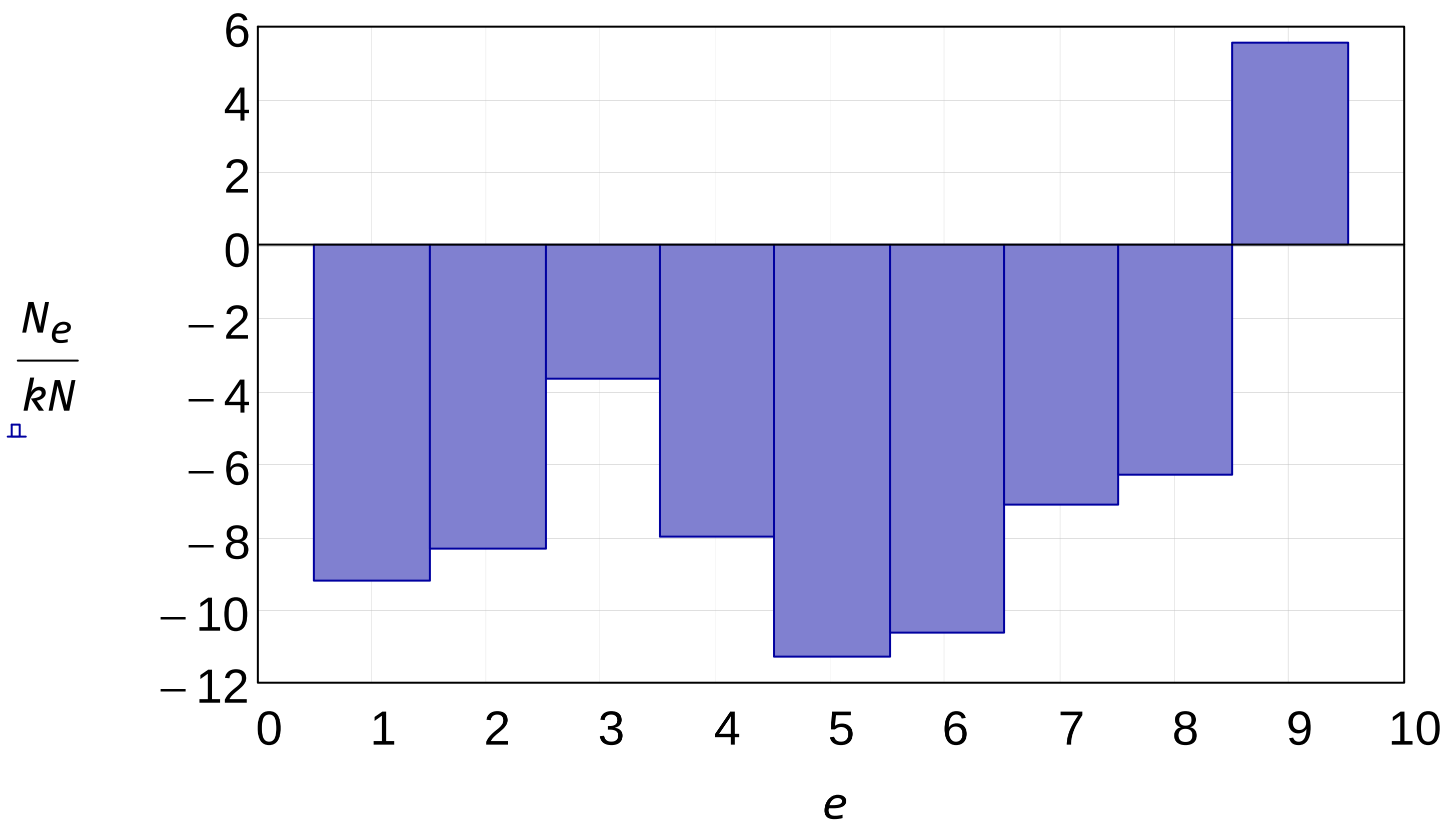
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right] - E \cdot A_e \cdot \alpha w \cdot W_e$$

$N =$

	1
1	-9.228
2	-8.305
3	-3.686
4	-8.009
5	-11.311
6	-10.602
7	-7.107
8	-6.266
9	5.565

$\cdot kN$



Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{E}{(L_e)^2}\cdot\left[\left(u_{2\cdot Wk_e-1} - u_{2\cdot Wp_e-1}\right)\cdot Lx_e + \left(u_{2\cdot Wk_e} - u_{2\cdot Wp_e}\right)\cdot Ly_e\right] - E\cdot\alpha w\cdot W_e$$

$\sigma =$

	1
1	-1.282
2	-1.153
3	-0.512
4	-1.112
5	-1.885
6	-1.767
7	-1.184
8	-1.044
9	1.391

$\cdot MPa$