

## *Statyka kratownicy aluminiowej o 2 różnych przekrojach prętów obciążonej temperaturą*

ORIGIN := 1 - *Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

E := 70GPa - *Moduł Younga aluminium*

$\alpha_t := 2 \cdot 10^{-5}$  - *Współczynnik rozszerzalności cieplnej stali*

D1 := 70mm g1 := 3mm

D2 := 50mm g2 := 3mm

$A1 := 4g1 \cdot (D1 - g1) = 8.040 \cdot \text{cm}^2$  - *Pole powierzchni przekroju elementów 1...3*

$A2 := 4g2 \cdot (D2 - g2) = 5.640 \cdot \text{cm}^2$  - *Pole powierzchni przekroju elementów 4...6*

### *Parametry pomocnicze:*

L<sub>ss</sub> := 2 - *Liczba stopni swobody węzła*

L<sub>e</sub> := 9 - *Liczba elementów*

L<sub>w</sub> := 5 - *Liczba węzłów*

L<sub>r</sub> := L<sub>ss</sub> · L<sub>w</sub> - *Liczba równań*

K<sub>0Lr, Lr</sub> := 0 - *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

p<sub>0Lr</sub> := 0 - *Deklaracja globalnego wektora obciążeń i wypełnienie go zerami*

*Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych*

$LBM(A, B, w, k) :=$ 

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| for $i \in 1 \dots \text{rows}(B)$ | for $j \in 1 \dots \text{cols}(B)$     |
|                                    | $A_{w+i-1, k+j-1} \leftarrow B_{i, j}$ |
| A                                  |  |

Numery węzłów początkowych (Wp)  
i końcowych (Wk) elementów

Przyrost temperatury  
elementów

Przekroje elementów

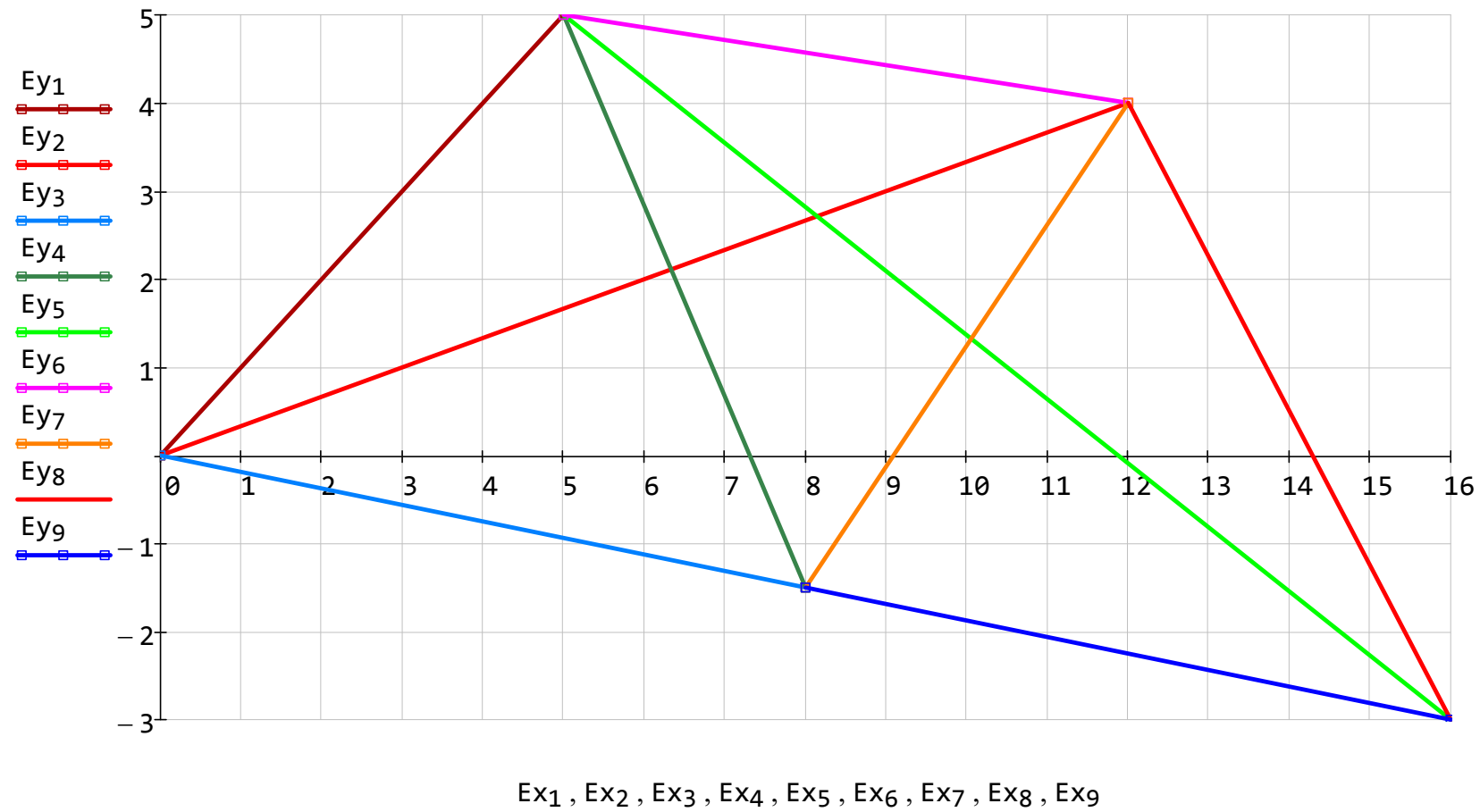
Współrzędne węzłów kratownicy

$$\begin{matrix}
 X := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \\
 Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \cdot \frac{8}{16} \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\
 Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 T := \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A1 \\ A2 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

$e := 1 \dots Le$       *Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

*Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych*

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \quad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \quad Ex, Ey - \text{współrzędne węzłów elementów kratownicy}$$



*Macierze sztywności elementów kratownicy*

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$$

$$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$$

$$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

$$Lx =$$

|   | 1      |
|---|--------|
| 1 | 5.000  |
| 2 | 12.000 |
| 3 | 8.000  |
| 4 | 3.000  |
| 5 | 11.000 |
| 6 | 7.000  |
| 7 | 4.000  |
| 8 | 4.000  |
| 9 | 8.000  |

m

$$Ly =$$

|   | 1      |
|---|--------|
| 1 | 5.000  |
| 2 | 4.000  |
| 3 | -1.500 |
| 4 | -6.500 |
| 5 | -8.000 |
| 6 | -1.000 |
| 7 | 5.500  |
| 8 | -7.000 |
| 9 | -1.500 |

m

$$L =$$

|   | 1      |
|---|--------|
| 1 | 7.071  |
| 2 | 12.649 |
| 3 | 8.139  |
| 4 | 7.159  |
| 5 | 13.601 |
| 6 | 7.071  |
| 7 | 6.801  |
| 8 | 8.062  |
| 9 | 8.139  |

m

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

*Mimo, że nie jest to potrzebne w dalszych obliczeniach, można pokazać bloki J macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 3979.6 & 3979.6 \\ 3979.6 & 3979.6 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 4004.4 & 1334.8 \\ 1334.8 & 444.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 4685.7 & -878.6 \\ -878.6 & 164.7 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 968.5 & -2098.3 \\ -2098.3 & 4546.4 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} 1898.5 & -1380.7 \\ -1380.7 & 1004.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_6 = \begin{pmatrix} 7800.0 & -1114.3 \\ -1114.3 & 159.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 2008.3 & 2761.4 \\ 2761.4 & 3797.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_8 = \begin{pmatrix} 1718.3 & -3007.1 \\ -3007.1 & 5262.4 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_9 = \begin{pmatrix} 4685.7 & -878.6 \\ -878.6 & 164.7 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

*Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej*

$$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1 \quad k_e := Lss \cdot Wk_e - 1 \quad \leftarrow \text{numery stopni swobody węzłów początkowych (} n_e \text{) i końcowych (} k_e \text{)}$$

$$K := \sum_e \left( LBM(Ko, J_e, n_e, n_e) + LBM(Ko, J_e, k_e, k_e) - LBM(Ko, J_e, n_e, k_e) - LBM(Ko, J_e, k_e, n_e) \right)$$

|    | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | 12669.7 | 4435.8  | -3979.6 | -3979.6 | -4685.7 | 878.6   | -4004.4 | -1334.8 | 0.0     | 0.0     |
| 2  | 4435.8  | 4589.3  | -3979.6 | -3979.6 | 878.6   | -164.7  | -1334.8 | -444.9  | 0.0     | 0.0     |
| 3  | -3979.6 | -3979.6 | 14646.5 | -613.7  | -968.5  | 2098.3  | -7800.0 | 1114.3  | -1898.5 | 1380.7  |
| 4  | -3979.6 | -3979.6 | -613.7  | 9689.3  | 2098.3  | -4546.4 | 1114.3  | -159.2  | 1380.7  | -1004.2 |
| 5  | -4685.7 | 878.6   | -968.5  | 2098.3  | 12348.2 | -1094.1 | -2008.3 | -2761.4 | -4685.7 | 878.6   |
| 6  | 878.6   | -164.7  | 2098.3  | -4546.4 | -1094.1 | 8672.8  | -2761.4 | -3797.0 | 878.6   | -164.7  |
| 7  | -4004.4 | -1334.8 | -7800.0 | 1114.3  | -2008.3 | -2761.4 | 15531.0 | -25.1   | -1718.3 | 3007.1  |
| 8  | -1334.8 | -444.9  | 1114.3  | -159.2  | -2761.4 | -3797.0 | -25.1   | 9663.4  | 3007.1  | -5262.4 |
| 9  | 0.0     | 0.0     | -1898.5 | 1380.7  | -4685.7 | 878.6   | -1718.3 | 3007.1  | 8302.5  | -5266.3 |
| 10 | 0.0     | 0.0     | 1380.7  | -1004.2 | 878.6   | -164.7  | 3007.1  | -5262.4 | -5266.3 | 6431.2  |

$\cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

*Globalna macierz sztywności **K** bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.  $|\mathbf{K}|=0$*

$$\left| \mathbf{K} \cdot \frac{1\text{m}}{\text{kN}} \right| = 0.000 \times 10^0$$

*Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.*

*Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.*

### Globalny wektor sił węzłowych

$$p := p_0$$

$$F_{x2} := 6\text{kN} \cdot \cos(20\text{deg}) \quad F_{y2} := -6\text{kN} \cdot \sin(20\text{deg})$$

$$F_{x4} := -7\text{kN} \cdot \cos(40\text{deg}) \quad F_{y4} := -7\text{kN} \cdot \sin(40\text{deg})$$

$$p_3 := F_{x2} \quad p_4 := F_{y2}$$

$$p_7 := F_{x4} \quad p_8 := F_{y4}$$

$$p =$$

|    | 1      |
|----|--------|
| 1  | 0.000  |
| 2  | 0.000  |
| 3  | 5.638  |
| 4  | -2.052 |
| 5  | 0.000  |
| 6  | 0.000  |
| 7  | -5.362 |
| 8  | -4.500 |
| 9  | 0.000  |
| 10 | 0.000  |

kN

### siły węzłowe wywołane temperaturą w elemencie "e"

$$t_e := \alpha t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \begin{pmatrix} L_{x_e} \\ L_{y_e} \end{pmatrix}$$

### Agregacja wektora obciążeń termicznych $p_T$ (metodą podobną do stosowanej w agregacji macierzy sztywności)

$$p_T := \sum_e \left( \text{LBM}(p_0, t_e, n_e, 1) - \text{LBM}(p_0, t_e, k_e, 1) \right)$$

$$p_T =$$

|    | 1       |
|----|---------|
| 1  | 42.714  |
| 2  | 14.238  |
| 3  | 31.929  |
| 4  | -23.221 |
| 5  | -9.288  |
| 6  | -12.772 |
| 7  | -33.425 |
| 8  | -1.466  |
| 9  | -31.929 |
| 10 | 23.221  |

kN

*Kopiowanie Macierzy  $\mathbf{K}$  i wektora  $\mathbf{p}$  przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$$\underline{\mathbf{K}}_0 := \mathbf{K} \quad \underline{\mathbf{p}}_0 := \mathbf{p} - \mathbf{p}_T$$

*Uwzględnienie warunków brzegowych*

$$\underline{\mathbf{s}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach}$$

$$i := 1 \dots L_r \quad j := 1 \dots \text{rows}(\underline{\mathbf{s}})$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{s_j, i} := 0 \quad \text{zerowanie wierszy}$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{s_j, s_j} := 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \text{wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności}$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{s_j} := 0 \quad \text{zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"}$$



$$K_0 = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 3 & -3979.6 & -3979.6 & 14646.5 & -613.7 & -968.5 & 2098.3 & -7800.0 & 1114.3 & -1898.5 & 1380.7 \\ 4 & -3979.6 & -3979.6 & -613.7 & 9689.3 & 2098.3 & -4546.4 & 1114.3 & -159.2 & 1380.7 & -1004.2 \\ 5 & -4685.7 & 878.6 & -968.5 & 2098.3 & 12348.2 & -1094.1 & -2008.3 & -2761.4 & -4685.7 & 878.6 \\ 6 & 878.6 & -164.7 & 2098.3 & -4546.4 & -1094.1 & 8672.8 & -2761.4 & -3797.0 & 878.6 & -164.7 \\ 7 & -4004.4 & -1334.8 & -7800.0 & 1114.3 & -2008.3 & -2761.4 & 15531.0 & -25.1 & -1718.3 & 3007.1 \\ 8 & -1334.8 & -444.9 & 1114.3 & -159.2 & -2761.4 & -3797.0 & -25.1 & 9663.4 & 3007.1 & -5262.4 \\ 9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 10 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{array} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$\left| K_0 \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{kN}} \right| = 7.036 \times 10^{23} \quad - \text{wyznacznik macierzy } K_0 \text{ jest zawsze wi\u0119kszy od zera, } |K_0| > 0$$

$$p_0^T = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0.000 & 0.000 & -26.291 & 21.169 & 9.288 & 12.772 & 28.063 & -3.033 & 0.000 & 0.000 \end{array} \cdot \text{kN}$$

Rozwiązanie układu równań:

$$u := \text{lsolve}(K\theta, p\theta)$$

|    | 1       |
|----|---------|
| 1  | 0.0000  |
| 2  | 0.0000  |
| 3  | -1.5658 |
| 4  | 4.5477  |
| 5  | 1.3606  |
| 6  | 6.2648  |
| 7  | 1.9886  |
| 8  | 2.7971  |
| 9  | 0.0000  |
| 10 | 0.0000  |

$u =$        $\cdot \text{mm}$

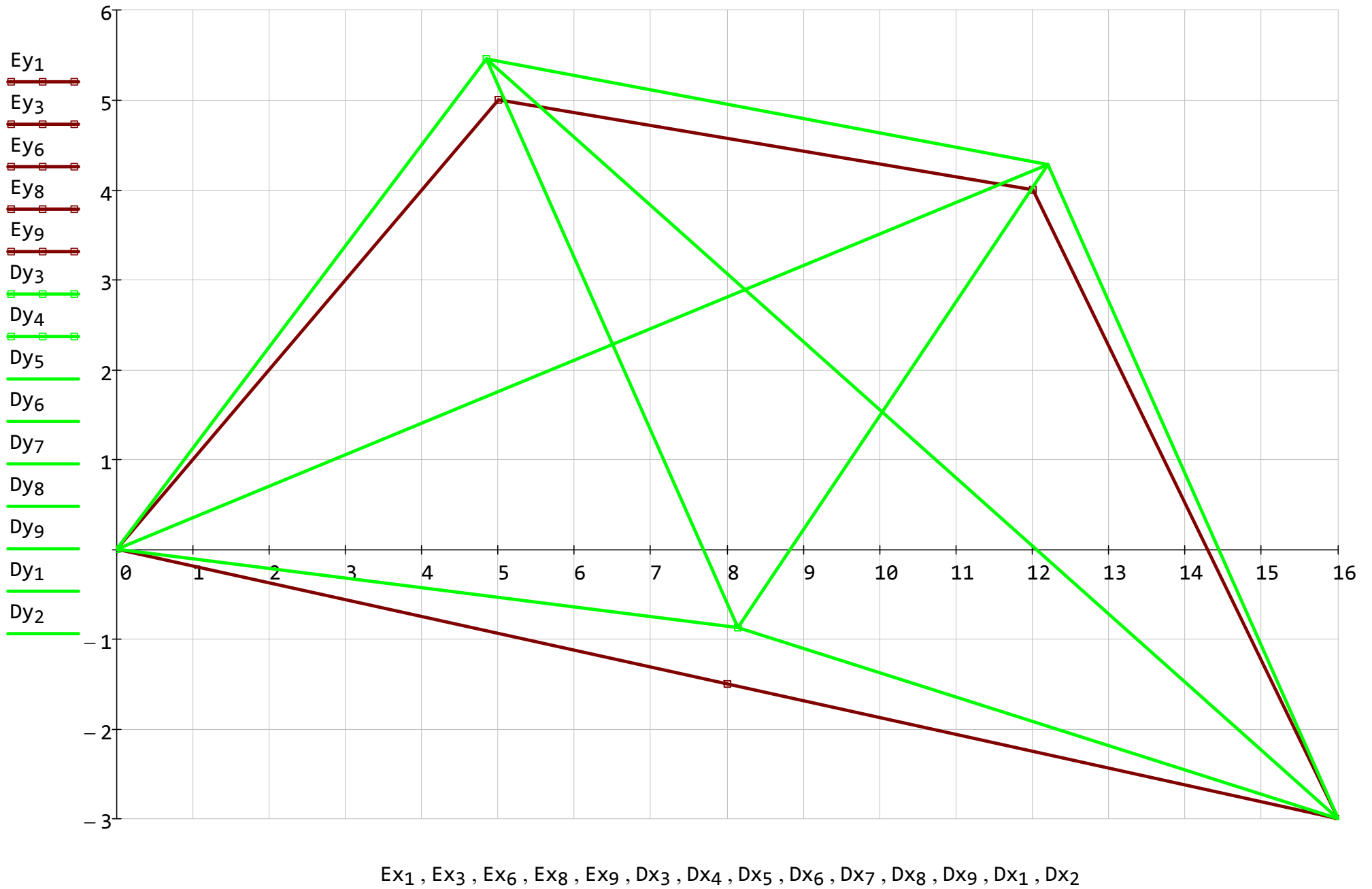
$u$  - wektor przemieszczeń węzłowych

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

skala := 100

$$Dx_e := Ex_e + \text{skala} \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix}$$

$$Dy_e := Ey_e + \text{skala} \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$



### Obliczenie reakcji podpór

$$r := K \cdot u - p + pT$$

|    | 1       |
|----|---------|
| 1  | 18.279  |
| 2  | -1.365  |
| 3  | -0.000  |
| 4  | -0.000  |
| 5  | 0.000   |
| 6  | -0.000  |
| 7  | 0.000   |
| 8  | -0.000  |
| 9  | -18.554 |
| 10 | 7.916   |

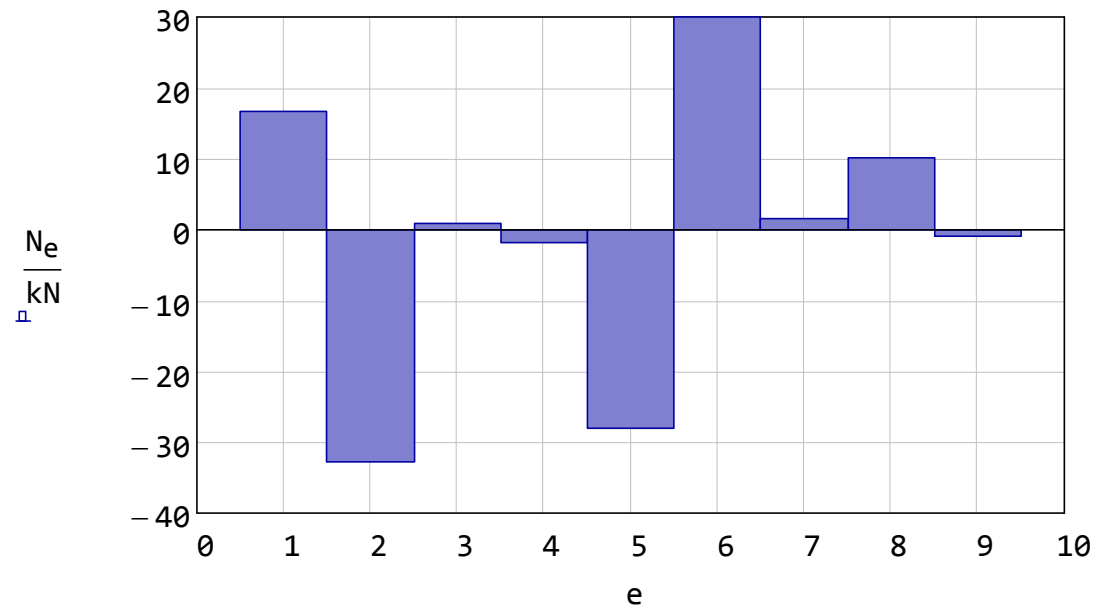
r = kN

### Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^2} \cdot \left[ (u_2 \cdot w_{k_{e-1}} - u_2 \cdot w_{p_{e-1}}) \cdot L_{x_e} + (u_2 \cdot w_{k_e} - u_2 \cdot w_{p_e}) \cdot L_{y_e} \right] - \alpha t \cdot T_e \cdot E \cdot A_e$$

|   | 1       |
|---|---------|
| 1 | 16.782  |
| 2 | -32.695 |
| 3 | 0.887   |
| 4 | -1.835  |
| 5 | -28.04  |
| 6 | 29.976  |
| 7 | 1.656   |
| 8 | ...     |

N = kN



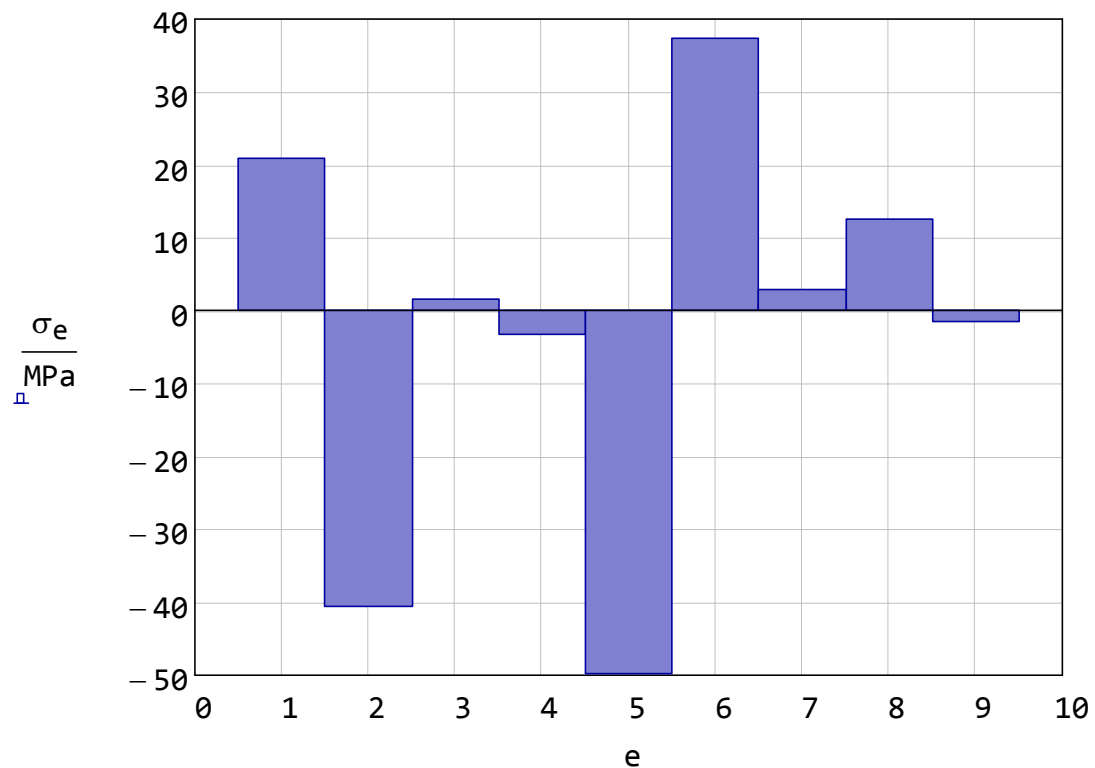
## Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{E}{(L_e)^2} \cdot \left[ (u_2 \cdot w_{k_{e-1}} - u_2 \cdot w_{p_{e-1}}) \cdot L_{x_e} + (u_2 \cdot w_{k_e} - u_2 \cdot w_{p_e}) \cdot L_{y_e} \right] - \alpha t \cdot T_e \cdot E$$

$\sigma =$

|   | 1       |
|---|---------|
| 1 | 20.874  |
| 2 | -40.665 |
| 3 | 1.572   |
| 4 | -3.253  |
| 5 | -49.717 |
| 6 | 37.284  |
| 7 | 2.936   |
| 8 | 12.520  |
| 9 | -1.572  |

·MPa



Obliczenie wyteżeń

f := 130MPa

$$w_e := \frac{\sigma_e}{f}$$

w =

|   | 1      |
|---|--------|
| 1 | 0.161  |
| 2 | -0.313 |
| 3 | 0.012  |
| 4 | -0.025 |
| 5 | -0.382 |
| 6 | 0.287  |
| 7 | 0.023  |
| 8 | 0.096  |
| 9 | -0.012 |

