

ORIGIN := 1

Statyka kratownicy o 3 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami

$E := 209 \text{ GPa}$ - moduł Younga $\alpha t := 1.2 \cdot 10^{-5}$ - wsp. rozszerzalności cieplnej

$\rho := 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ - gęstość $\gamma := \rho \cdot g = 76.492 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$ - ciężar właściwy

Parametry przekroju $g = 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ - średnie przysp. ziemskie

$D1 := 6 \text{ cm}$ $g1 := 4 \text{ mm}$

$D2 := 4 \text{ cm}$ $g2 := 4 \text{ mm}$

$D3 := 4 \text{ cm}$ $g3 := 3 \text{ mm}$

$A1 := \pi \cdot g1 \cdot (D1 - g1) = 7.037 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 1...4

$A2 := \pi \cdot g2 \cdot (D2 - g2) = 4.524 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 5...7

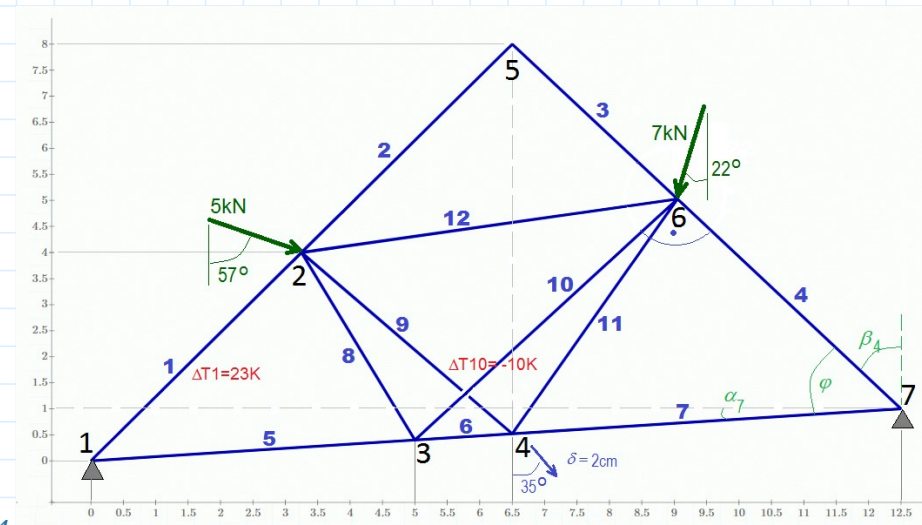
$A3 := \pi \cdot g3 \cdot (D3 - g3) = 3.487 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 8...12

$i := 1..4$ $A_i := A1$ $i := 5..7$ $A_i := A2$ $i := 8..12$ $A_i := A3$

Przekroje elementów

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$A :=$	$\begin{bmatrix} 7.037 \\ 7.037 \\ 7.037 \\ 7.037 \\ 4.524 \\ 4.524 \\ 4.524 \\ 3.487 \\ 3.487 \\ 3.487 \\ 3.487 \\ 3.487 \end{bmatrix} \text{ cm}^2$	$Wp :=$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	$Wk :=$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$	$T :=$	$\begin{bmatrix} 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
--------	---	---------	--	---------	--	--------	---



Obliczanie współrzędnej X węzła nr 6 (X6)

$\alpha_7 := \text{atan}\left(\frac{1}{12.5}\right) = 4.574 \text{ deg}$ $\beta_4 := \text{atan}\left(\frac{6}{7}\right) = 40.601 \text{ deg}$

$\varphi := \frac{\pi}{2} + \alpha_7 - \beta_4 = 53.973 \text{ deg}$

$l_{67} := \sqrt{(12.5 - 5)^2 + \left(1 - \frac{5}{12.5}\right)^2} = 7.524$

$l_4 := l_{67} \cdot \cos(\varphi)$ $X_6 := 12.5 - l_4 \cdot \sin(\beta_4)$

Kolejność wybierania węzłów podczas rysowania elementów

Współrzędne węzłów kratownicy

$X := \begin{bmatrix} 0 \\ 6.5 \cdot \frac{4}{8} \\ 5 \\ 6.5 \\ 6.5 \\ X_6 \\ 12.5 \end{bmatrix} \text{ m}$

$Y := \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \cdot \frac{5}{12.5} \\ 1 \cdot \frac{6.5}{12.5} \\ 8 \\ 1 + 7 \cdot \frac{(12.5 - X_6)}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ m}$

$Q := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

Parametry pomocnicze:

$L_{ss} := 2$ - Liczba stopni swobody węzła

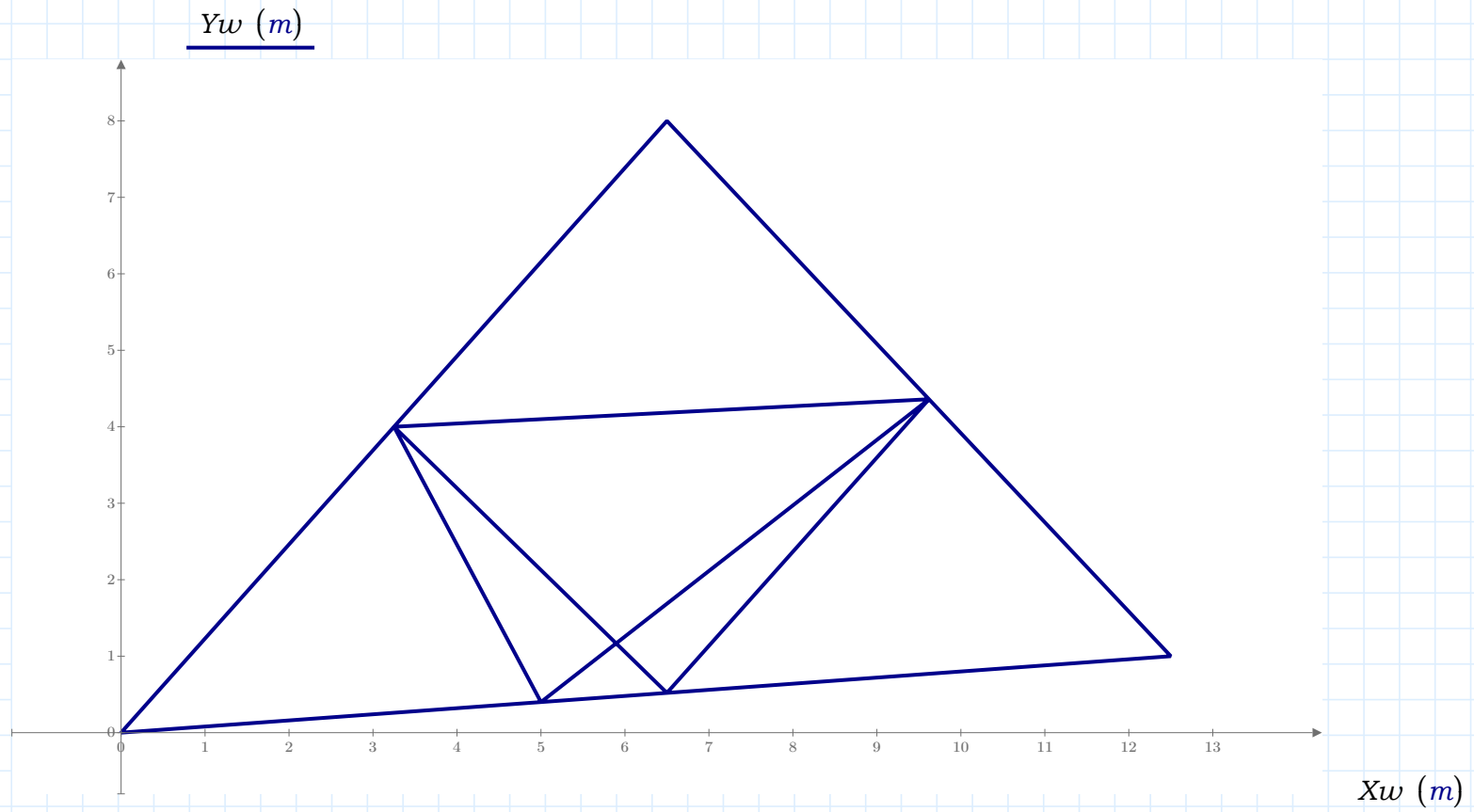
$L_e := \text{rows}(A) = 12$ - Liczba elementów

$L_w := \text{rows}(X) = 7$ - Liczba węzłów

$L_r := L_{ss} \cdot L_w = 14$ - Liczba równań

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$i := 1 .. \text{rows}(Q) \quad Xw_i := X_{Q_i} \quad Yw_i := Y_{Q_i}$$



Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$e := 1 .. Le$

Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{Wk_e} - X_{Wp_e} \quad Ly_e := Y_{Wk_e} - Y_{Wp_e} \quad L_e := \sqrt{Lx_e^2 + Ly_e^2}$$

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{L_e^3} \cdot \begin{bmatrix} Lx_e^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & Ly_e^2 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 11347.7 & 13966.4 \\ 13966.4 & 17189.4 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 11347.7 & 13966.4 \\ 13966.4 & 17189.4 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 12993.2 & -15158.7 \\ -15158.7 & 17685.1 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} 14075.9 & -16421.9 \\ -16421.9 & 19158.9 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_5 = \begin{bmatrix} 18729.8 & 1498.4 \\ 1498.4 & 119.9 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_6 = \begin{bmatrix} 62432.6 & 4994.6 \\ 4994.6 & 399.6 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{bmatrix} 15608.2 & 1248.7 \\ 1248.7 & 99.9 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_8 = \begin{bmatrix} 3480.2 & -7159.2 \\ -7159.2 & 14727.5 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_9 = \begin{bmatrix} 7130.6 & -7635.2 \\ -7635.2 & 8175.6 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_{10} = \begin{bmatrix} 6904.7 & 5918.3 \\ 5918.3 & 5072.8 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 5857.5 & 7209.2 \\ 7209.2 & 8872.9 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 11386.8 & 643.5 \\ 643.5 & 36.4 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Agregacja globalnej macierzy sztywności

$K_{Lr, Lr} := 0 \frac{kN}{m}$ - tworzenie zerowej macierzy globalnej

$n := Lss \cdot (Wp - 1)$ - numery stopni swobody węzłów początkowych

$k := Lss \cdot (Wk - 1)$ - numery stopni swobody węzłów końcowych

$i := 1 .. Lss$ $j := 1 .. Lss$ - pętla po wierszach i kolumnach macierzy J

Blok górny lewy

$$\boxed{K}_{n_e+i, n_e+j} := K_{n_e+i, n_e+j} + (J_e)_{i,j}$$

Blok górny prawy

$$\boxed{K}_{n_e+i, k_e+j} := K_{n_e+i, k_e+j} - (J_e)_{i,j}$$

Blok dolny lewy

$$\boxed{K}_{k_e+i, n_e+j} := K_{k_e+i, n_e+j} - (J_e)_{i,j}$$

Blok dolny prawy

$$\boxed{K}_{k_e+i, k_e+j} := K_{k_e+i, k_e+j} + (J_e)_{i,j}$$

$$K^e = \begin{bmatrix} J^e & -J^e \\ -J^e & J^e \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 30077 & 15465 & -11348 & -13966 & -18730 & -1498 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15465 & 17309 & -13966 & -17189 & -1498 & -120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11348 & -13966 & 44693 & 13782 & -3480 & 7159 & -7131 & 7635 & -11348 & -13966 & -11387 & -644 & 0 & 0 \\ -13966 & -17189 & 13782 & 57318 & 7159 & -14727 & 7635 & -8176 & -13966 & -17189 & -644 & -36 & 0 & 0 \\ -18730 & -1498 & -3480 & 7159 & 91547 & 5252 & -62433 & -4995 & 0 & 0 & -6905 & -5918 & 0 & 0 \\ -1498 & -120 & 7159 & -14727 & 5252 & 20320 & -4995 & -400 & 0 & 0 & -5918 & -5073 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7131 & 7635 & -62433 & -4995 & 91029 & 5817 & 0 & 0 & -5857 & -7209 & -15608 & -1249 \\ 0 & 0 & 7635 & -8176 & -4995 & -400 & 5817 & 17548 & 0 & 0 & -7209 & -8873 & -1249 & -100 \\ 0 & 0 & -11348 & -13966 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24341 & -1192 & -12993 & 15159 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13966 & -17189 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1192 & 34875 & 15159 & -17685 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11387 & -644 & -6905 & -5918 & -5857 & -7209 & -12993 & 15159 & 51218 & -17810 & -14076 & 16422 \\ 0 & 0 & -644 & -36 & -5918 & -5073 & -7209 & -8873 & 15159 & -17685 & -17810 & 50826 & 16422 & -19159 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15608 & -1249 & 0 & 0 & -14076 & 16422 & 29684 & -15173 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1249 & -100 & 0 & 0 & 16422 & -19159 & -15173 & 19259 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Tworzenie wektorów sił węzłowych

Wektor obciążenia statycznego

$$pF_{Lr} := 0 \text{ kN}$$

$$F2 := 5 \text{ kN}$$

$$\beta2 := 57 \text{ deg}$$

$$F6 := 7 \text{ kN}$$

$$\beta6 := 22 \text{ deg}$$

$$pF_3 := F2 \cdot \sin(\beta2)$$

$$pF_4 := -F2 \cdot \cos(\beta2)$$

$$pF_{11} := -F6 \cdot \sin(\beta6)$$

$$pF_{12} := -F6 \cdot \cos(\beta6)$$

Wektor obciążenia termicznego

$$pT_{Lr} := 0 \text{ kN} \quad t_e := \frac{\alpha t \cdot T_e \cdot A_e \cdot E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{bmatrix}$$

$$j := 1 \dots Lss \quad pT_{n_e+i} := pT_{n_e+i} + \begin{pmatrix} t_e \\ \end{pmatrix}_i \quad pT_{k_e+i} := pT_{k_e+i} - \begin{pmatrix} t_e \\ \end{pmatrix}_i$$

Wektory obciążenia grawitacyjnego

$$pG_{Lr} := 0 \text{ kN} \quad q_e := \frac{\gamma \cdot A_e \cdot L_e}{2} \quad pG_{n_e+2} := pG_{n_e+2} + q_e \quad pG_{k_e+2} := pG_{k_e+2} + q_e$$

p - Globalny wektor sił węzłowych

$$p := pF - pT - pG$$

Kopiowanie macierzy sztywności i wektora p przed modyfikacją

$$K0 := K \quad p0 := p \quad K := K \cdot \frac{m}{\text{kN}} \quad \leftarrow \text{--- bezwymiarowa macierz sztywności} \quad p := p \cdot \frac{m}{\text{kN}}$$

Modyfikacja macierzy K i wektora p prowadząca do uwzględnienia warunków brzegowych

$$Wb := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \quad w := 1 \dots \text{rows}(Wb) \quad c := 1 \dots Lr \quad K_{Wb_w, c} := 0 \quad K_{Wb_w, Wb_w} := 1 \quad p_{Wb_w} := 0 \text{ cm}$$

Wymuszone przemieszczenia węzła nr6

$$\delta4 := 2 \text{ cm} \quad \beta4 := 35 \text{ deg} \\ p_7 := \delta4 \cdot \sin(\beta4) \quad p_8 := -\delta4 \cdot \cos(\beta4)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11347.7 & -13966.4 & 44692.9 & 13781.9 & -3480.2 & 7159.2 & -7130.6 & 7635.2 & -11347.7 & -13966.4 & -11386.8 & -643.5 & 0 & 0 & 0 \\ -13966.4 & -17189.4 & 13781.9 & 57318.2 & 7159.2 & -14727.5 & 7635.2 & -8175.6 & -13966.4 & -17189.4 & -643.5 & -36.4 & 0 & 0 & 0 \\ -18729.8 & -1498.4 & -3480.2 & 7159.2 & 91547.2 & 5252.1 & -62432.6 & -4994.6 & 0 & 0 & -6904.7 & -5918.3 & 0 & 0 & 0 \\ -1498.4 & -119.9 & 7159.2 & -14727.5 & 5252.1 & 20319.7 & -4994.6 & -399.6 & 0 & 0 & -5918.3 & -5072.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11347.7 & -13966.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24340.9 & -1192.3 & -12993.2 & 15158.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13966.4 & -17189.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1192.3 & 34874.5 & 15158.7 & -17685.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11386.8 & -643.5 & -6904.7 & -5918.3 & -5857.5 & -7209.2 & -12993.2 & 15158.7 & 51218.1 & -17809.6 & -14075.9 & 16421.9 & 0 \\ 0 & 0 & -643.5 & -36.4 & -5918.3 & -5072.8 & -7209.2 & -8872.9 & 15158.7 & -17685.1 & -17809.6 & 50826.1 & 16421.9 & -19158.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 29.791 \\ 28.302 \\ 6.64 \\ 5.444 \\ 0.011 \\ -0.016 \\ 0 \\ -0.268 \\ -9.263 \\ -12.662 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad m$$

$$\det(K) = 1.292594 \cdot 10^{36}$$

Rozwiązanie układu równań

Obliczenie reakcji podpór

$$u := K^{-1} \cdot p$$

$$r := K0 \cdot u - p0$$

$$u = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 10.667 \\ -10.335 \\ 8.797 \\ -10.934 \\ 11.472 \\ -16.383 \\ 0.859 \\ -2.374 \\ 1.183 \\ -2.089 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} \quad mm \quad r = \begin{bmatrix} -99.493 \\ 48.53 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 307.478 \\ -84.128 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -209.557 \\ 46.994 \end{bmatrix} \quad kN$$

Obliczanie sił wewnętrznych

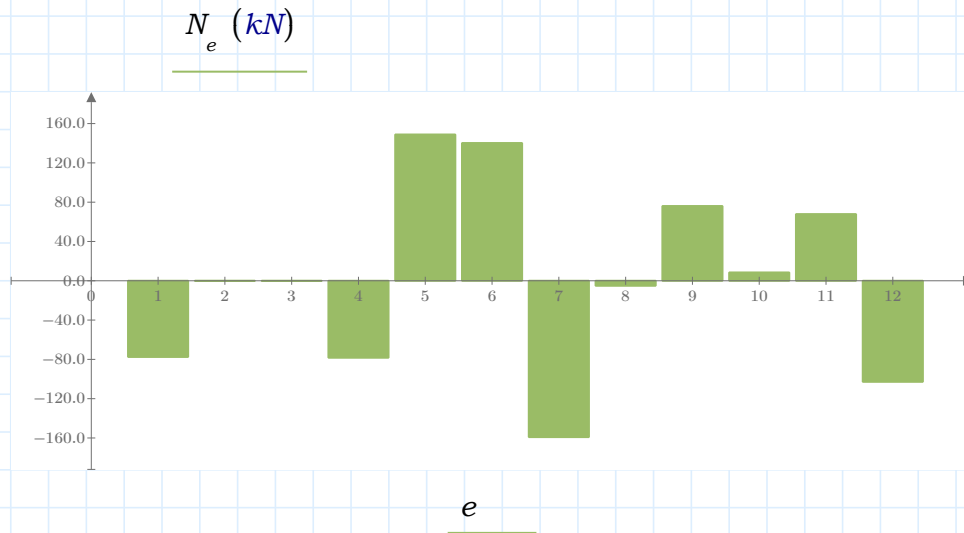
$$\varepsilon_e := \frac{u_{k_e+1} - u_{n_e+1}}{L_e} \cdot \frac{Lx_e}{L_e} + \frac{u_{k_e+2} - u_{n_e+2}}{L_e} \cdot \frac{Ly_e}{L_e} \quad \text{-- odkształcenia}$$

$$\varepsilon_e = \frac{(u_{k_e+1} - u_{n_e+1}) \cdot Lx_e + (u_{k_e+2} - u_{n_e+2}) \cdot Ly_e}{L_e^2}$$

$$\sigma_e := E \cdot (\varepsilon_e - \alpha t \cdot T_e) \quad \text{-- naprężenia}$$

$$N_e := \sigma_e \cdot A_e \quad \text{-- siły wewnętrzne}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} -110.179 \\ -0.252 \\ -0.244 \\ -111.282 \\ 329.052 \\ 309.907 \\ -351.687 \\ -14.544 \\ 218.139 \\ 24.233 \\ 194.575 \\ -294.913 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad N = \begin{bmatrix} -77.535 \\ -0.177 \\ -0.172 \\ -78.311 \\ 148.86 \\ 140.199 \\ -159.099 \\ -5.072 \\ 76.069 \\ 8.45 \\ 67.851 \\ -102.841 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

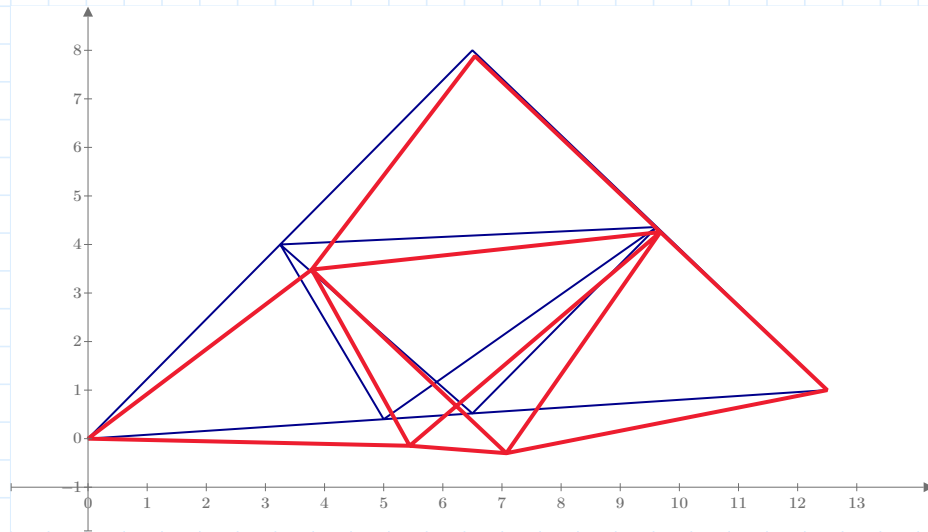


Rysunek odkształconej kratownicy

$$skala := 50 \quad s := 1 \dots \text{rows}(Q) \quad Dx_s := X_{Q_s} + skala \cdot u_{Q_s \cdot Lss - 1} \quad Dy_s := Y_{Q_s} + skala \cdot u_{Q_s \cdot Lss}$$

$Yw (m)$

$Dy (m)$



$Xw (m)$

$Dx (m)$