Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa 2

$ORIGIN := 1$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\mathtt{Blok\_A11}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$
\mathrm{Blok\_B11}(EA, EJ, L, l) := \left|
\begin{array}{l}
L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\
a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\
A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\
A_{2,3} \leftarrow -6a \\
A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\
A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\
A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\
A
\end{array}
\right.
$$

$$
\mathrm{Blok\_C11}(EA, EJ, L, l) := \left|
\begin{array}{l}
L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\
a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\
A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\
A_{2,3} \leftarrow 6a \\
A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\
A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3} \\
A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1 \\
A
\end{array}
\right.
$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\mathtt{Blok\_A01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_B01}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Blok\_C01}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array}\right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\mathrm{Blok\_A10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

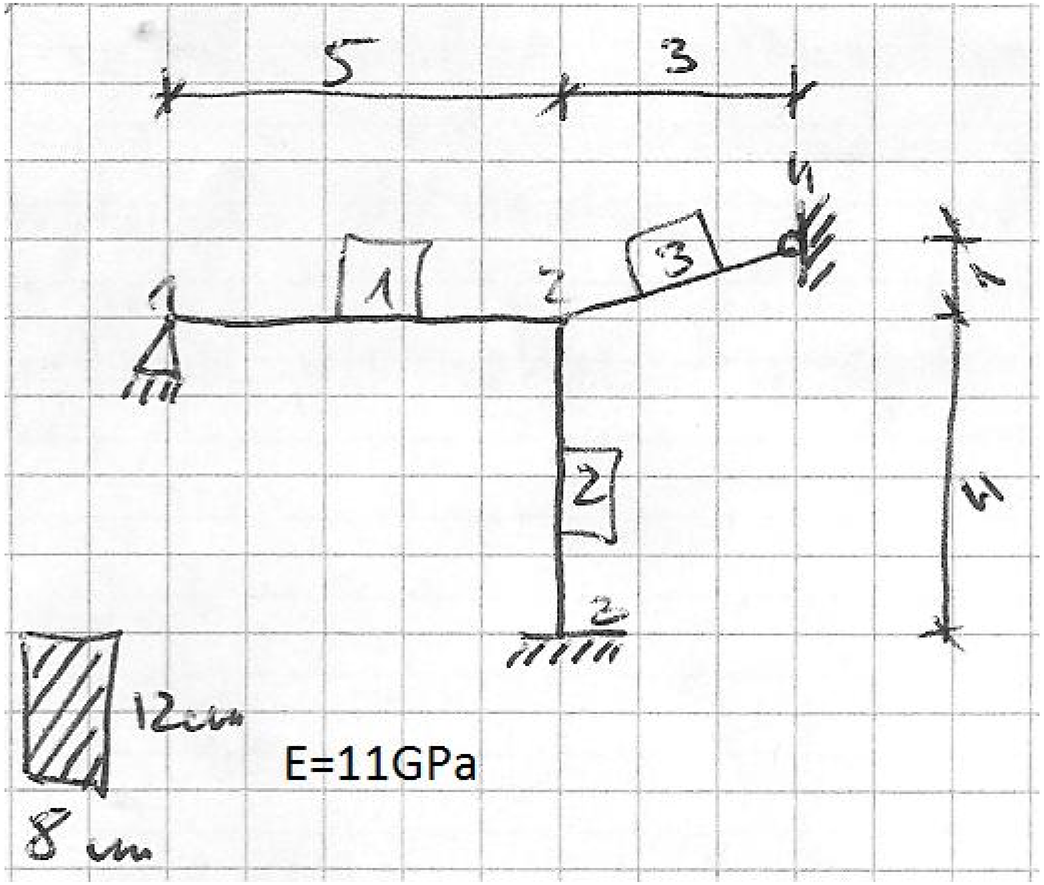
$$\mathrm{Blok\_B10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_C10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$E := 11\,GPa \qquad b := 8\,cm \qquad h := 12\,cm$

$J := \dfrac{b \cdot h^3}{12} \qquad A := b \cdot h \qquad EA := E \cdot A \qquad EJ := E \cdot J$

$EA = 105.6 \cdot MN \quad EJ = 126.72 \cdot kN \cdot m^2$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A1 & C1 & & \\ C1^T & B1+A2+A3 & C2 & C3 \\ & C2^T & B2 & \\ & C3^T & & B3 \end{bmatrix}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 5m \qquad Ly := 0m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.000000\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 21120.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 12.165 & 30.413 \\ 0.000 & 30.413 & 101.376 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 21120.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 12.165 & -30.413 \\ 0.000 & -30.413 & 101.376 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -21120.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -12.165 & 30.413 \\ 0.000 & -30.413 & 50.688 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

macierz obrotu

$$A1 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 21120.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 12.165 & 30.413 \\ 0.000 & 30.413 & 101.376 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B1 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 21120.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 12.165 & -30.413 \\ 0.000 & -30.413 & 101.376 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C1 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -21120.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -12.165 & 30.413 \\ 0.000 & -30.413 & 50.688 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 0m \quad Ly := -4m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 4\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 26400.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 23.760 & 47.520 \\ 0.000 & 47.520 & 126.720 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 26400.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 23.760 & -47.520 \\ 0.000 & -47.520 & 126.720 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -26400.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -23.760 & 47.520 \\ 0.000 & -47.520 & 63.360 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ -1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

macierz obrotu

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 23.760 & 0.000 & -47.520 \\ 0.000 & 26400.000 & 0.000 \\ -47.520 & 0.000 & 126.720 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 23.760 & 0.000 & 47.520 \\ 0.000 & 26400.000 & 0.000 \\ 47.520 & 0.000 & 126.720 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -23.760 & 0.000 & -47.520 \\ 0.000 & -26400.000 & 0.000 \\ 47.520 & 0.000 & 63.360 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 3m \qquad Ly := 1m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 3.162278\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m)$

$$A = \begin{pmatrix} 33393.652 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 48.087 & 76.032 \\ 0.000 & 76.032 & 160.290 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m)$

$$B = \begin{pmatrix} 33393.652 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 48.087 & -76.032 \\ 0.000 & -76.032 & 160.290 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m)$

$$C = \begin{pmatrix} -33393.652 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -48.087 & 76.032 \\ 0.000 & -76.032 & 80.145 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.948683 & -0.316228 & 0.000000 \\ 0.316228 & 0.948683 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 30059.096 & -10003.670 & 24.043 \\ -10003.670 & 3382.643 & 72.130 \\ 24.043 & 72.130 & 160.290 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 30059.096 & -10003.670 & -24.043 \\ -10003.670 & 3382.643 & -72.130 \\ -24.043 & -72.130 & 160.290 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -30059.096 & 10003.670 & 24.043 \\ 10003.670 & -3382.643 & 72.130 \\ -24.043 & -72.130 & 80.145 \end{pmatrix} \cdot kN$$