

# Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa A

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok\_A11} (EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

Blok\_B11 ( EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1$$

A

Blok\_C11 ( EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1$$

A

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\text{Blok\_A01}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok\_B01 (EA, EJ, L, 1) :=}$$

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -3a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1$$

$$A$$

$$\text{Blok\_C01 (EA, EJ, L, 1) :=}$$

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 3a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 0$$

$$A$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok\_B10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\text{Blok\_A10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok\_C10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$E := 14 \text{ GPa}$$

$$b := 5 \text{ cm}$$

$$h := 10 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$A := b \cdot h$$

$$EA := E \cdot A$$

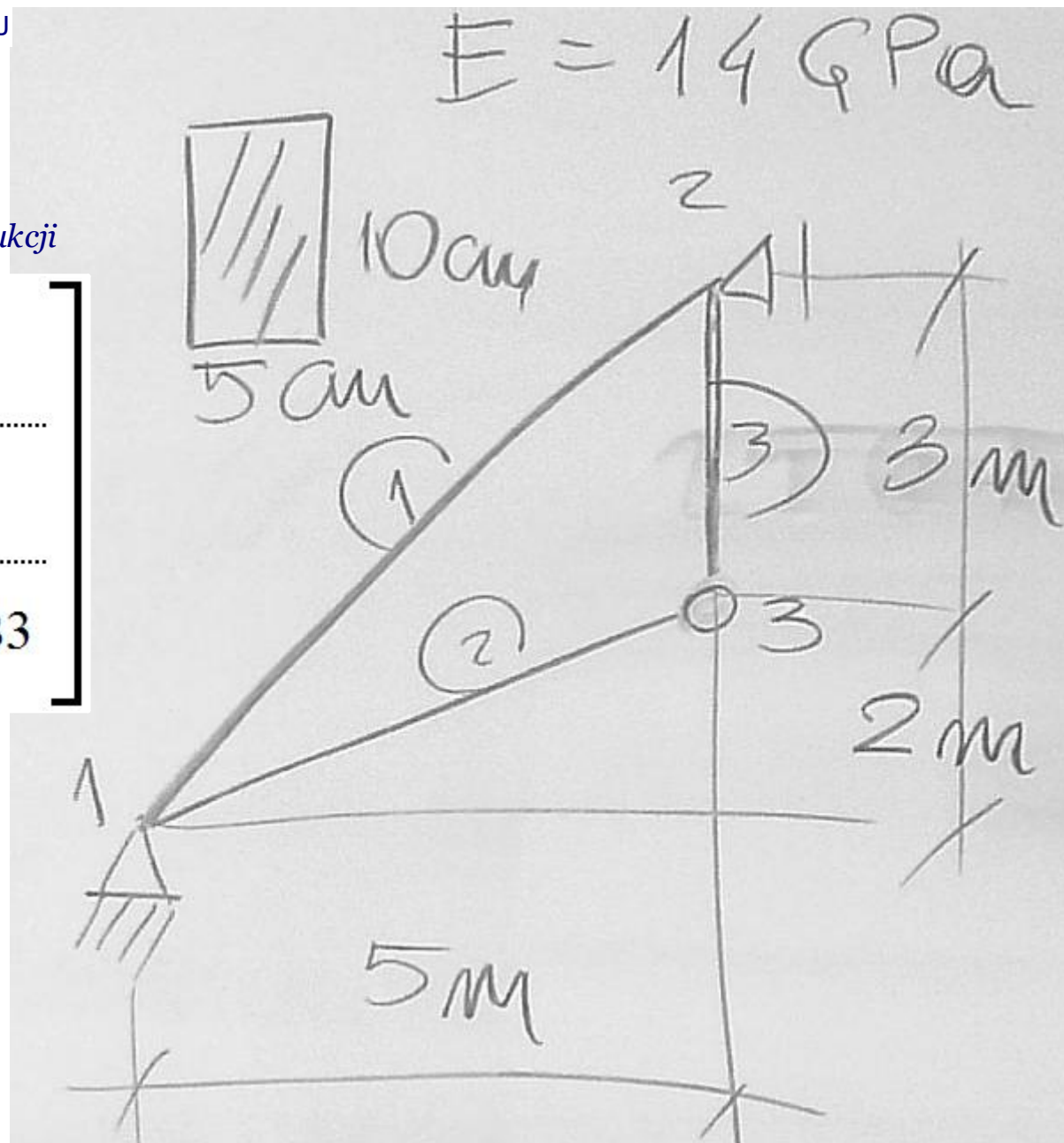
$$EJ := E \cdot J$$

$$EA = 70 \cdot \text{MN}$$

$$EJ = 58.333 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$

Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A1+A2 & C1 & C2 \\ C1^T & B1+A3 & C3 \\ C2^T & C3^T & B2+B3 \end{bmatrix}$$



*Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych*

$$L_x := 5\text{m} \quad L_y := 5\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2} = 7.071068\text{m}$$

$$\underline{A} := \text{Blok\_A11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 9899.495 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.980 & 7.000 \\ 0.000 & 7.000 & 32.998 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok\_B11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 9899.495 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.980 & -7.000 \\ 0.000 & -7.000 & 32.998 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{C} := \text{Blok\_C11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -9899.495 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1.980 & 7.000 \\ 0.000 & -7.000 & 16.499 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$\underline{\underline{R}} := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707107 & -0.707107 & 0.000000 \\ 0.707107 & 0.707107 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 4950.737 & -4948.758 & 4.950 \\ -4948.758 & 4950.737 & 4.950 \\ 4.950 & 4.950 & 32.998 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 4950.737 & -4948.758 & -4.950 \\ -4948.758 & 4950.737 & -4.950 \\ -4.950 & -4.950 & 32.998 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} -4950.737 & 4948.758 & 4.950 \\ 4948.758 & -4950.737 & 4.950 \\ -4.950 & -4.950 & 16.499 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$



*Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{L_x} := 5\text{m} \quad \underline{L_y} := 2\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 5.385165\text{m}$$

$$A := \text{Blok\_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 12998.674 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 4.482 & 12.069 \\ 0.000 & 12.069 & 43.329 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok\_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 12998.674 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 4.482 & -12.069 \\ 0.000 & -12.069 & 43.329 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok\_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -12998.674 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -4.482 & 12.069 \\ 0.000 & -12.069 & 21.664 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

*Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.928477 & -0.371391 & 0.000000 \\ 0.371391 & 0.928477 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 11206.371 & -4480.756 & 4.482 \\ -4480.756 & 1796.785 & 11.206 \\ 4.482 & 11.206 & 43.329 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 11206.371 & -4480.756 & -4.482 \\ -4480.756 & 1796.785 & -11.206 \\ -4.482 & -11.206 & 43.329 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -11206.371 & 4480.756 & 4.482 \\ 4480.756 & -1796.785 & 11.206 \\ -4.482 & -11.206 & 21.664 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

*Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{L_x} := 0\text{m} \quad \underline{L_y} := -3\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 3\text{m}$$

$$A := \text{Blok\_A10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 23333.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 6.481 & 19.444 \\ 0.000 & 19.444 & 58.333 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok\_B10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 23333.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 6.481 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok\_C10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -23333.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -6.481 & 0.000 \\ 0.000 & -19.444 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

*Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ -1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 6.481 & 0.000 & -19.444 \\ 0.000 & 23333.333 & 0.000 \\ -19.444 & 0.000 & 58.333 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 6.481 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 23333.333 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -6.481 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -23333.333 & 0.000 \\ 19.444 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$