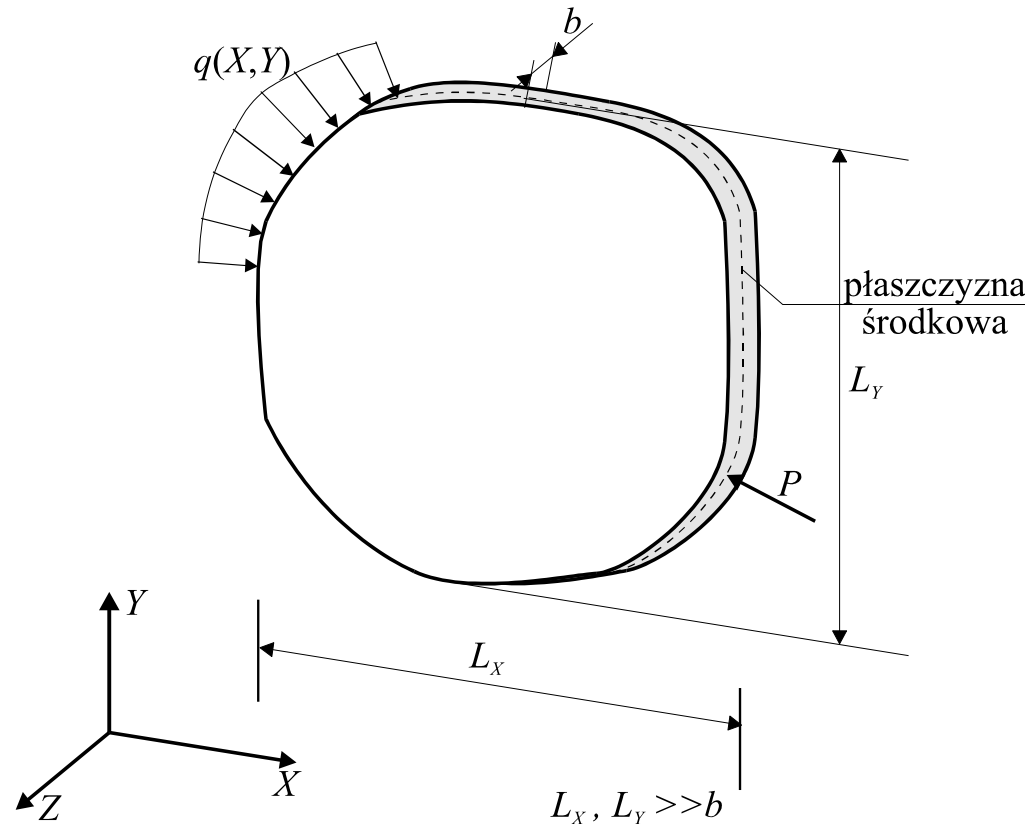


VI. STATYKA TARCZ

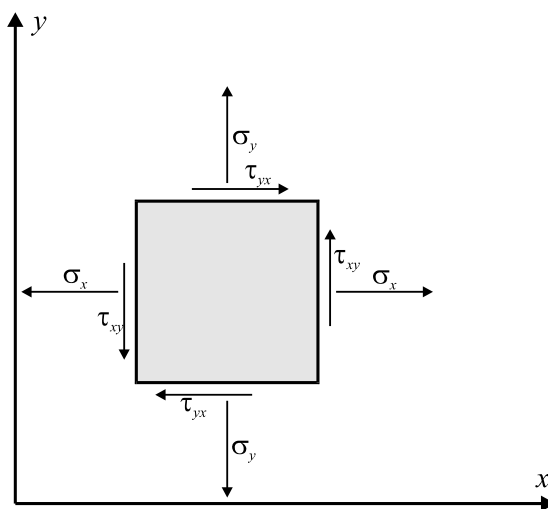
Omawiane w poprzednich rozdziałach konstrukcje i elementy służące do ich modelowania nie wnoszą poza pewnym uporządkowaniem nic nowego do metody obliczeń statycznych konstrukcji prętowych. Metoda elementów skończonych jest tu jedynie sformalizowanym wariantem metody przemieszczeń. Dzieje się tak z powodu prostoty konstrukcji prętowych. Różniczkowe równania równowagi elementów prętowych (4.16) są na tyle proste, że dają się bez trudu scałkować. Ścisłe rozwiązania tych równań mogą być używane jako funkcje kształtu elementów. Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja w ustrojach powierzchniowych. Częstkowe równania różniczkowe, opisujące równowagę tych konstrukcji mają zamknięte rozwiązania tylko dla bardzo prostych zadań. Rozwiązania uzyskane metodami aproksymacyjnymi (np. przez rozwinięcie w szereg) są żmudne i wymagają sporego nakładu pracy, a efekt końcowy i tak wymaga użycia komputera w celu rozwiązania układu równań i sumowania szeregów. W tej sytuacji metoda numeryczna, która zakłada pewne uproszczenia na etapie tworzenia równań równowagi elementu, okazuje się o wiele bardziej efektywna. Dzięki temu metoda elementów skończonych przyniosła tak wiele ważnych rezultatów w mechanice ośrodków ciągłych. Doskonale widoczne jest to na przykładzie najprostszej konstrukcji ciągłej jaką jest tarcza. Tarczę zdefiniować można jako bryłę, której jeden wymiar (grubość) jest dużo mniejszy od dwóch pozostałych, a powierzchnia środkowa (powierzchnie równoległa do obu zewnętrznych powierzchni tarczy) jest płaszczyzną. Taki kształt ma też płyta, tarczę wyróżnia sposób obciążenia, które musi działać w płaszczyźnie środkowej (Rys.6.1).



Rys.6.1

6.1. PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA I PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

Gdy płaszczyzny boczne tarczy są swobodne a tarcza dostatecznie cienka można założyć, że $\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$ na całej grubości tarczy. O takiej konstrukcji mówimy, że panuje w niej płaski stan naprężenia (P.S.N.). Jest to przybliżenie (por. [11], [17]) tym lepsze im cieńsza jest tarcza. W tarczy cenniejszej różne od zera mogą być więc tylko składowe pokazane na Rys.6.2.



Rys.6.2

Ze względu na symetrię tensora naprężenia składowe styczne τ_{xy} i τ_{yx} są sobie równe, mamy więc trzy niezależne składowe naprężenia, które zgrupujemy w wektor naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Zupełnie przeciwny przypadek konstrukcji o dużej grubości (Rys.6.1) może być również analizowany metodą płaskiego stanu, tym razem jest to płaski stan odkształcenia (P.S.O.). Ponieważ wymiar poprzeczny konstrukcji pokazanej na Rys.6.1 uniemożliwia deformację w kierunku prostopadłym do jej przekroju poprzecznego, to cienka warstwa wycięta z tej konstrukcji znajduje się w stanie opisanym przez równania:

$$\varepsilon_z = 0, \gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0. \quad (6.2)$$

Z równań tych wynika, że $\sigma_z \neq 0$, ale pierwsze równanie pozwala obliczyć składowe σ_z na podstawie dwóch pozostałych składowych normalnych. Mamy więc równanie:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (6.3)$$

które pozwala ograniczyć ilość poszukiwanych składowych tensora naprężenia do trzech składowych podanych w równaniu (6.1).

Niezależne składowe tensora odkształcenia również zgrupujemy w macierz kolumnową, którą nazwiemy wektorem odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Między wektorami $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ istnieje związek opisywany równaniami konstytutywnymi, których postać zależy od modelu materiału, którym opisujemy konstrukcję. W tej książce zajmiemy się tylko izotropowymi materiałami sprężystymi, a więc podlegającymi prawu Hooke'a, więc równanie konstytutywne możemy zapisać następująco:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.5)$$

gdzie \mathbf{D} jest kwadratową macierzą zawierającą stałe sprężyste materiału a opisaną w rozdz.I.

Dla płaskiego stanu naprężenia (P.S.N.) macierz \mathbf{D} ma postać (1.13). Płaski stan odkształcenia (P.S.O.) wymaga nieco innej macierzy stałych sprężystych, która jest opisana równaniem (1.17).

6.2. ZWIĄZKI GEOMETRYCZNE

Dowolny punkt tarczy w czasie deformacji może poruszać się tylko po płaszczyźnie, więc wektor przemieszczenia tego punktu $\mathbf{u}(x,y)$ ma dwie składowe

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Między składowymi wektora przemieszczenia w wektorem odkształcenia zachodzą znane związki geometryczne [17]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (6.7)$$

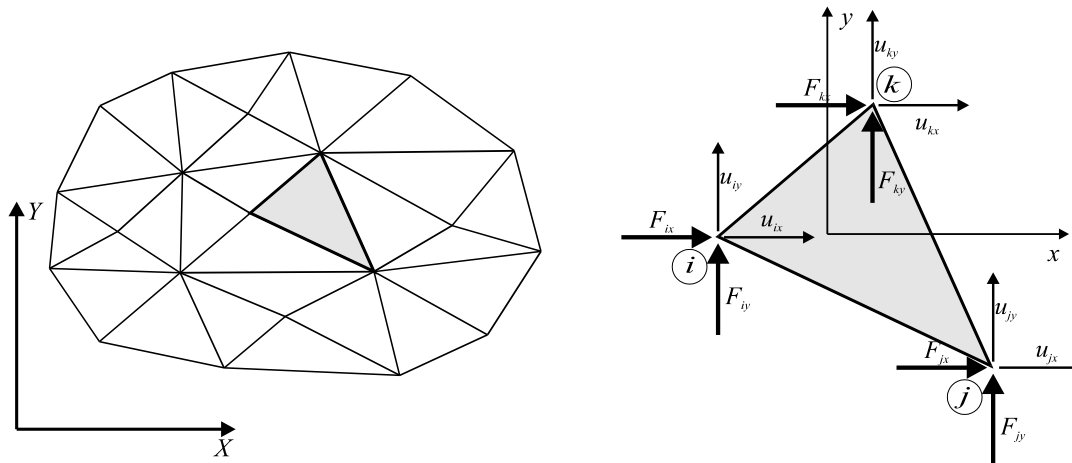
które można przedstawić w formie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D} \mathbf{u}(x, y), \quad (6.8)$$

gdzie \mathcal{D} jest macierzą operatorów różniczkowych(1.35).

6.3. MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU SPRĘŻYSTEGO

Podzielmy (zdyskretyzujmy) tarczę na elementy skończone. Omawiać będziemy w tej książce tylko tarczowe elementy trójkątne, takie też elementy wybierzemy w trakcie dyskretyzacji (Rys.6.3).



Rys.6.3

Jak widać, zgodnie z założeniem (6.6) węzły elementu mają dwa stopnie swobody, siły węzłowe również mają po dwie składowe. Lokalny układ współrzędnych xy jest wybrany tak, że osie jego są równoległe do osi układu globalnego, nieistotne jest więc rozróżnianie składowych lokalnych i globalnych wektorów i macierzy.

Przemieszczenia i siły węzłowe pogrupujemy teraz w wektory:

- przemieszczeń węzłów i elementu

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_{kx} \\ u_{ky} \end{bmatrix}, \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ u_{kx} \\ u_{ky} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

- sił węzłowych i sił elementu

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix}, \mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Ponieważ poszukujemy zależności między wektorami sił i przemieszczeń węzłowych elementu, zastosujemy zasadę pracy wirtualnej (por. rozdz.I), która wymaga podania związku między przemieszczeniami punktów leżących wewnątrz elementu a przemieszczeniami węzłów. Godząc się na błędy wynikające z aproksymacji zakładamy, że zależność ta może być opisana funkcjami dwóch zmiennych:

$$u_x(x, y) = N_i(x, y)u_{ix} + N_j(x, y)u_{jx} + N_k(x, y)u_{kx} \text{ oraz}$$

$$u_y(x, y) = N_i(x, y)u_{iy} + N_j(x, y)u_{jy} + N_k(x, y)u_{ky}, \quad (6.11)$$

lub w zwartej macierzowej formie:

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{u}^e, \quad (6.12)$$

gdzie $\mathbf{N}^e(x, y)$ jest macierzą funkcji kształtu elementu:

$$\mathbf{N}^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_i(x, y) \mathbf{I} & N_j(x, y) \mathbf{I} & N_k(x, y) \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

a $N_i(x, y)$, $N_j(x, y)$, $N_k(x, y)$ funkcjami kształtu dla węzłów i, j, k .

Założymy teraz najprostszą z możliwych postaci funkcji kształtu dla węzła i

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y, \quad (6.14)$$

gdzie a_i , b_i , c_i - są stałymi, które wyznaczymy z warunków zgodności

$$N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0, \quad N_i(x_k, y_k) = 0. \quad (6.15)$$

Po podstawieniu tych warunków do równania (6.14) otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

który po rozwiązaniu daje wartości współczynników funkcji kształtu.

Równanie (6.16) można zapisać także w ogólnej postaci:

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\delta}_i, \text{ gdzie } \boldsymbol{\delta}_i = \begin{bmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

która po modyfikacji polegającej na zmianie indeksu i na j lub k , pozwala wyznaczyć współczynniki funkcji kształtu następnych węzłów. W równaniu tym δ_{ij} - oznacza deltę Kroneckera.

Rozwiążemy układ równań (6.16) metodą Cramera

$$W = \det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix},$$

$$W_{a_i} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 0 & x_j & y_j \\ 0 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix},$$

$$W_{b_i} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_i \\ 1 & 0 & y_j \\ 1 & 0 & y_k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_k \end{vmatrix} = y_j - y_k,$$

$$W_{c_i} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & 1 \\ 1 & x_j & 0 \\ 1 & x_k & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_k \end{vmatrix} = x_k - x_j$$

czyli $a_i = \frac{W_{a_i}}{W}$, $b_i = \frac{W_{b_i}}{W}$, $c_i = \frac{W_{c_i}}{W}$.

Podobnie zamieniając indeksy i na j znajdziemy $\delta_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

(6.18)

$$W_{a_j} = \begin{vmatrix} 0 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 0 & x_k & y_k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix},$$

$$W_{b_j} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_i \\ 1 & 1 & y_j \\ 1 & 0 & y_k \end{vmatrix} = y_k - y_i,$$

$$W_{c_j} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & 0 \\ 1 & x_j & 1 \\ 1 & x_k & 0 \end{vmatrix} = x_i - x_k,$$

(6.19)

$$a_j = \frac{W_{a_j}}{W}, \quad b_j = \frac{W_{b_j}}{W}, \quad c_j = \frac{W_{c_j}}{W}.$$

Na koniec, dla punktu k mamy:

$$\delta_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$W_{a_k} = \begin{vmatrix} 0 & x_i & y_i \\ 0 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix},$$

$$W_{b_k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_i \\ 1 & 0 & y_j \\ 1 & 1 & y_k \end{vmatrix} = y_i - y_j,$$

(6.20)

$$W_{c_k} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & 0 \\ 1 & x_j & 0 \\ 1 & x_k & 1 \end{vmatrix} = x_j - x_i,$$

$$a_k = \frac{W_{a_k}}{W}, \quad b_k = \frac{W_{b_k}}{W}, \quad c_k = \frac{W_{c_k}}{W}.$$

Jak się okaże stałe a_i, a_j, a_k nie są istotne dla dalszych przekształceń (gdyż związane są z ruchem sztywnym tarczy) i mogą być pominięte w czasie rozwiązania układu równań (6.17).

Po wyznaczeniu funkcji kształtu elementu powróćmy do jego deformacji. Podstawimy równanie (6.12) do (6.8):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D} \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{u}^e = \mathbf{B}^e(x, y) \mathbf{u}^e, \quad (6.21)$$

otrzymując zależność między przemieszczeniami węzłów elementu a jego odkształceniami. Macierz \mathbf{B} występująca w równaniu (6.21) nosi nazwę macierzy geometrycznej i może być wyrażona następująco:

$$\mathbf{B}^e(x, y) = [\mathbf{B}_i(x, y) \quad \mathbf{B}_j(x, y) \quad \mathbf{B}_k(x, y)],$$

$$\text{gdzie } \mathbf{B}_n = \mathcal{D} \mathbf{N}_n(x, y) = \begin{bmatrix} b_n & 0 \\ 0 & c_n \\ c_n & b_n \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

jest macierzą geometryczną dowolnego węzła n .

Mamy już wszystkie składniki, niezbędne do napisania równania równowagi elementu. Wykorzystamy zasadę pracy wirtualnej, która mówi, że praca wykonana przez siły zewnętrzne (tu siły węzłowe) musi być równa pracy sił wewnętrznych tarczy (tu naprężen):

$$(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (6.23)$$

Przekształćmy to równanie podstawiając najpierw za $\boldsymbol{\sigma}$ związek konstytutywny (6.5) a następnie za $\boldsymbol{\varepsilon}$ związki geometryczne (6.21):

$$(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e = \int_V (\mathbf{B}^e \mathbf{u}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e dV = (\mathbf{u}^e)^T \int_V (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e dV \mathbf{u}^e. \quad (6.24)$$

W równaniu tym przed całką i za całką wyłączono zostały wektory przemieszczeń węzłowych elementu jako niezależne od zmiennych x i y . Równanie (6.24) może być spełnione niezależnie od przemieszczeń elementu tylko wtedy, gdy:

$$\mathbf{f}^e = \int_V (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e dV \mathbf{u}^e, \quad (6.25)$$

co po porównaniu ze znaną już zależnością (występowała we wszystkich poprzednich rozdziałach tej książki):

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e,$$

daje nam równanie wyznaczające współczynniki macierzy sztywności elementu:

$$\mathbf{K}^e = \int_V (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e dV. \quad (6.26)$$

Konstruowanie macierzy sztywności elementu można znacznie uprościć zauważając, że dzieli się ona na bloki:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ik} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jk} \\ \mathbf{K}_{ki} & \mathbf{K}_{kj} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

gdzie dowolny z nich np: \mathbf{K}_{ij} można obliczyć z równania:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_i)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV, \quad (6.28)$$

a pozostałe z analogicznych równań powstałych po odpowiednich zmianach indeksów.

Wstawiając do (6.28) macierze geometryczne \mathbf{B}_i oraz \mathbf{B}_j dane równaniem (6.22) oraz macierz \mathbf{D} daną równaniem (1.13) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ij} &= (\mathbf{B}_i)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j \int_V dV = (\mathbf{B}_i)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j A b = \\
&= \frac{EAb}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} b_i b_j + c_i c_j \frac{1-\nu}{2} & b_i c_j \nu + b_j c_i \frac{1-\nu}{2} \\ b_j c_i \nu + b_i c_j \frac{1-\nu}{2} & c_i c_j + b_i b_j \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (6.29)
\end{aligned}$$

gdzie A - powierzchnia tarczy, b - grubość tarczy.

Jest to blok macierzy sztywności dla płaskiego stanu naprężenia.

Zauważmy, że macierze \mathbf{B}_i , \mathbf{B}_j , \mathbf{D} nie zawierają składowych zależnych od zmiennych x , y , z można więc było wyłączyć je przed znak całki.

Blok macierzy sztywności dla płaskiego stanu odkształcenia otrzymamy przyjmując macierz stałych sprężystych wg równania (1.17):

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{EAb}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu)b_i b_j + c_i c_j \frac{1-2\nu}{2} & b_i c_j \nu + b_j c_i \frac{1-2\nu}{2} \\ b_j c_i \nu + b_i c_j \frac{1-2\nu}{2} & (1-\nu)c_i c_j + b_i b_j \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Ponieważ układ współrzędnych lokalnych został przyjęty tak, że jego osie były równoległe do osi układu globalnego, więc nie ma potrzeby transformować otrzymanej macierzy sztywności.

6.4. ODKSZTAŁCENIA I NAPRĘŻENIA W ELEMENCIE

Obliczymy jeszcze odkształcenia elementu. Dane są one równanie (6.21) a biorąc pod uwagę wynik (6.22) mamy:

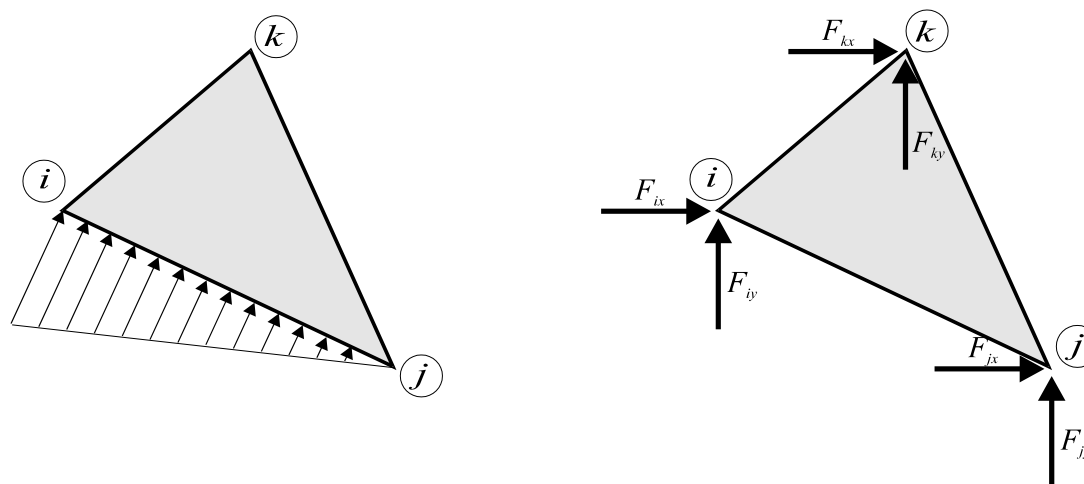
$$\varepsilon_x = \sum_{n=i,j,k} b_n u_{nx}, \quad \varepsilon_y = \sum_{n=i,j,k} b_n u_{ny}, \quad \gamma_{xy} = \sum_{n=i,j,k} (c_n u_{nx} + b_n u_{ny}). \quad (6.31)$$

Jak widać składowe wektora odkształcenia są stałe wewnątrz elementu, co jest konsekwencją przyjęcia liniowych funkcji kształtu. Element ten nosi nazwę CST od angielskiego określenia *constant strain triangle* - trójkąt stałego odkształcenia. Twórcą jego był Tocher.

Naprężenia w elemencie wyznaczamy z równania konstytutywnego (6.5) i równania (1.13) lub (1.17) w zależności od rodzaju płaskiego stanu, który modelujemy. Oczywiście jest, że tak jak odkształcenia, również naprężenia będą stałe wewnątrz elementu CST.

6.5. WEKTOR SIŁ WĘZŁOWYCH OD OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO

Obciażenia tarcz można traktować jak obciążenia kratownic płaskich, tzn. przyłożyć siły w węzłach konstrukcji. Jeżeli jednak dane jest obciążenie ciągłe działające na krawędzi elementu, trzeba sprowadzić je do sił skupionych, działających na węzły elementu Rys.6.4.



Rys.6.4

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach zastosujemy zasadą prac wirtualnych, która dla tego przypadku daje równanie równowagi:

$$(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e + L_{ij} \int_0^1 \mathbf{u}(\xi)^T \mathbf{q}(\xi) d\xi = 0, \quad (6.32)$$

gdzie $\mathbf{u}(\xi)$ jest przemieszczeniem obciążonej krawędzi a $\mathbf{q}(\xi) = \begin{bmatrix} q_x(\xi) \\ q_y(\xi) \end{bmatrix}$ - wektorem obciążenia na krawędzi, L_{ij} długością krawędzi $i-j$, ξ - jest bezwymiarową współrzędną przyjmującą wartość 0 w punkcie i oraz 1 w punkcie j . Ponieważ przyjęliśmy liniowe funkcje kształtu dla elementu, to wektor $\mathbf{u}(\xi)$ zapiszemy następująco:

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{N}_{ij}^e \mathbf{u}^e, \quad (6.33)$$

gdzie \mathbf{N}_{ij}^e jest macierzą funkcji kształtu dla przemieszczenia brzegowego.

$$\mathbf{N}_{ij}^e = \begin{bmatrix} N_i^o(\xi) \mathbf{I} & N_j^o(\xi) \mathbf{I} & N_k^o(\xi) \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.34)$$

gdzie $N_i^o(\xi) = 1 - \xi$, $N_j^o(\xi) = \xi$,

lub w postaci rozwiniętej

$$\mathbf{N}_{ij}^e = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \xi & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Po wstawieniu zależności (6.33) do równania (6.32) otrzymamy:

$$\mathbf{f}^e = -L_{ij} \int_0^1 (\mathbf{N}_{ij}^e)^T \mathbf{q}(\xi) d\xi, \quad (6.36)$$

Po uwzględnieniu liniowych funkcji kształtu opisanych równaniem (6.35) otrzymamy:

$$\mathbf{f}^e = -L_{ij} \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)q_x(\xi) \\ (1-\xi)q_y(\xi) \\ \xi q_x(\xi) \\ \xi q_y(\xi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi. \quad (6.37)$$

Obliczmy dla przykładu wektor sił węzłowych spowodowanych obciążeniem liniowo rozłożonym na krawędzi i - j o wartości q_{ix} , q_{iy} - w węźle i oraz q_{jx} , q_{jy} - w węźle j .

Obciążenie takie zapiszemy przy użyciu bezwymiarowej współrzędnej ξ :

$$\mathbf{q}(\xi) = \begin{bmatrix} q_{ix}(1-\xi) + q_{jx}\xi \\ q_{iy}(1-\xi) + q_{jy}\xi \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

a po wstawieniu do równania (6.37) otrzymamy:

$$\mathbf{f}^e = -L_{ij} \begin{bmatrix} q_{ix} \int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi + q_{jx} \int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi \\ q_{iy} \int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi + q_{jy} \int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi \\ q_{ix} \int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi + q_{jx} \int_0^1 \xi^2 d\xi \\ q_{iy} \int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi + q_{jy} \int_0^1 \xi^2 d\xi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

co po scałkowaniu daje:

$$\mathbf{f}^e = -\frac{L_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2q_{ix} + q_{jx} \\ 2q_{iy} + q_{jy} \\ q_{ix} + 2q_{jx} \\ q_{iy} + 2q_{jy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

Dla szczególnego przypadku, gdy obciążenie jest stałe i równe: $\mathbf{q}(\xi) = \begin{bmatrix} q_{ox} \\ q_{oy} \end{bmatrix}$, z równania (6.40) otrzymamy:

$$\mathbf{f}^e = -\frac{L_{ij}}{2} \begin{bmatrix} q_{ox} \\ q_{oy} \\ q_{ox} \\ q_{oy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Należy pamiętać, że obliczone siły są siłami działającymi na element, potrzebne siły węzłowe otrzymamy zmieniając zwroty wektorów tzn.:

$$\mathbf{p}^e = -\mathbf{f}^e, \quad (6.42)$$

gdzie \mathbf{p}^e jest wektorem sił węzłowych dla węzłów stykających się z elementem e .

6.6. WEKTOR SIŁ WĘZŁOWYCH SPOWODOWANYCH OBCIĄŻENIEM TERMICZNYM

Podobnie jak w punkcie poprzednim zastosujemy zasadę prac wirtualnych do obliczenia zastępczych sił węzłowych od obciążenia termicznego. Z uwagi na specyfikę elementu CST ograniczymy się tylko do stałego pola temperatury wewnątrz elementu.

Odpowiednie równanie pracy wirtualnej ma postać:

$$(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^{et} = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_t dV = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_t dV, \quad (6.43)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}_t$ - jest polem naprężeń w elemencie wywołanym przez temperaturę a $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ - odkształceniem elementu wywołanym zmianą temperatury.

Zakładając izotropię tarczy otrzymamy:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \alpha_t \Delta t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

Po wstawieniu do równania (6.43) związków geometrycznych (6.21) otrzymamy

$$\mathbf{f}^{et} = \alpha_t \Delta t \int_V (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} dV = \alpha_t \Delta t A b (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Dla płaskiego stanu naprężenia równanie to upraszcza się do następującej zależności:

$$\mathbf{f}_{\text{PSN}}^{et} = \frac{\alpha_t \Delta t E A b}{1 - \nu} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

gdzie $b_i \dots c_k$ są współczynnikami funkcji kształtu elementu CST.

Płaski stan odkształcenia daje nieco inny wektor sił węzłowych:

$$\mathbf{f}_{\text{PSO}}^{et} = \frac{\alpha_t \Delta t E A b}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}. \quad (6.47)$$

Z podobnych powodów jakie opisywaliśmy w poprzednich rozdziałach przed przyłożeniem sił do węzłów należy zmienić znaki składowych:

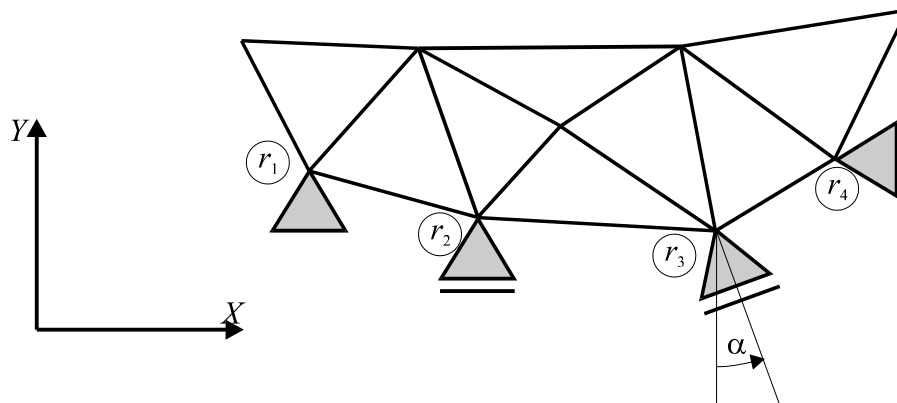
$$\mathbf{p}^{et} = -\mathbf{f}^{et}. \quad (6.48)$$

Naprężenia w elemencie poddanym działaniu temperatury obliczamy z uwzględnieniem poprawki spowodowanej termicznym rozszerzeniem elementu:

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{D} \left(\mathbf{B} \mathbf{u}^e - \alpha_t \Delta t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right). \quad (6.49)$$

WARUNKI BRZEGOWE TARCZY

Warunki brzegowe konstrukcji tarczowej można traktować analogicznie jak kratownicy płaskiej, gdyż węzły obu układów mają dwa stopnie swobody na płaszczyźnie XY .



Rys.6.5

Mamy więc węzły nieprzesuwne jak węzeł r_1 (Rys.6.5), przesuwne wzdłuż osi X (węzeł r_2), przesuwna wzdłuż osi Y (węzeł r_4) lub „ukośne” (węzeł r_3). Warunki brzegowe dla tych podpór są następujące:

- węzeł r_1 : $u_{r_1X} = 0, u_{r_1Y} = 0,$
- węzeł r_2 : $u_{r_2Y} = 0,$
- węzeł r_4 : $u_{r_4X} = 0,$
- dla węzła r_3 , gdzie więzy nie są zgodne z osiami globalnego układu współrzędnych polecamy stosowanie elementów brzegowych opisanych w rozdz.II.s