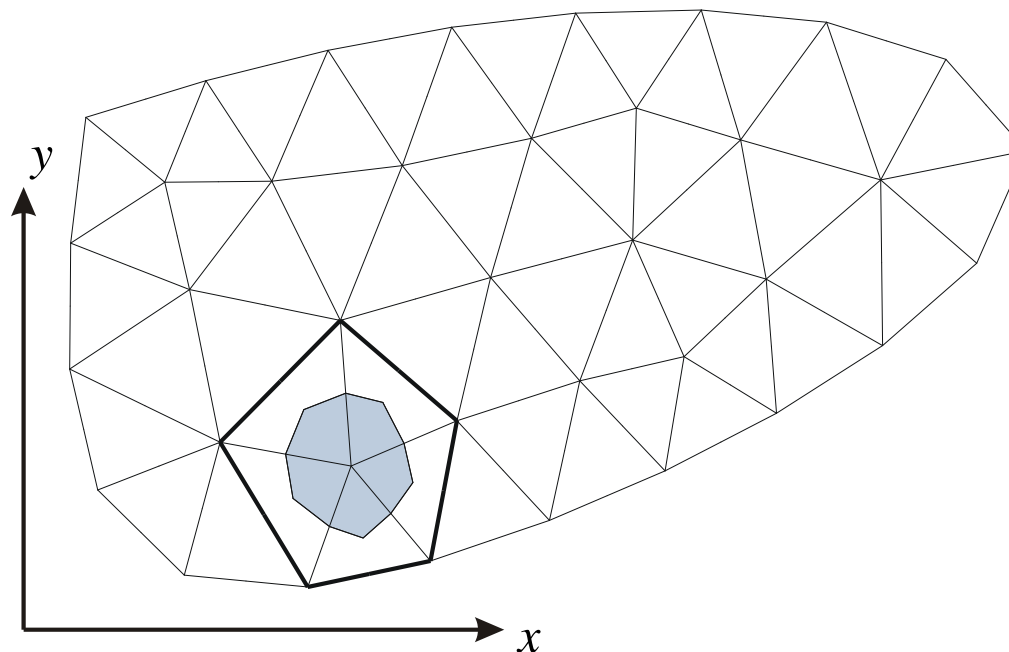


8 Metoda objętości skończonych

Metoda objętości skończonych lub objętości kontrolnych (obszarów kontrolnych) została zbudowana na zasadzie osłabienia warunków opisanych rozwiązywanym równaniem różniczkowym. Zamiast spełnienia warunku w dowolnym punkcie obszaru żądamy, aby został on spełniony w sposób całkowy w małym obszarze kontrolnym. Duża dowolność kształtowania tych obszarów powoduje łatwość generowania odpowiednich równań wyznaczających wartości węzłowe poszukiwanej funkcji. Z tego powodu metody objętości skończonych wyparły w większości zastosowań praktycznych zaprezentowaną w poprzednim punkcie metodę różnic skończonych.



Rys. 8.10 Obszar kontrolny zbudowany wokół węzła siatki 2D

Ze względu na sposób wybierania obszaru kontrolnego metody objętości skończonych można wyróżnić dwa podejścia:

- obszar kontrolny zbudowany jest wokół węzła siatki (rys. 8.10),
- obszar kontrolny równoważny jest komórce siatki (rys. 8.13).

W pierwszym przypadku niewiadomymi będą wartości funkcji w węzłach siatki a obszar kontrolny zbudowany jest przez połączenie krawędziami środków komórek o wspólnym węźle, jak na rys. 8.10, lub przez utworzenie innej, podrzędnej siatki rozdzielającej obszary kontrolne poszczególnych węzłów. Podejście drugie powoduje, że niewiadomymi są wartości funkcji w punktach środkowych (najczęściej są to środki ciężkości) komórek – rys. 8.13, 8.14. Wyznaczanie wartości pośrednich, leżących między węzłami siatki odbywa się tu zwykle metodą interpolacji liniowej lub przez uśrednienie sąsiednich wartości. Możliwe jest

jednak jawne wprowadzenie dowolnej funkcji interpolacyjnej analogicznie jak ma to miejsce w Metodzie Elementów Skończonych, co nazywane jest zwykle metodą hybrydową.

Zastosowanie metody pokazane zostanie na przykładzie rozwiązania równania Poissona w obszarze 2D.

8.1.1 Obszar kontrolny zbudowany wokół węzła siatki

Jako przykład ilustrujący zastosowanie metody objętości skończonych (kontrolnych) wybierzemy rozwiązanie dobrze znanego równania Poissona (8.19), które teraz zapiszemy w nieco innej postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p(x, y) = 0. \quad (8.1)$$

Całkując to równanie w obszarze kontrolnym Ω , otrzymamy:

$$\int_{\Omega} [u_{,xx} + u_{,yy} + p(x, y)] d\Omega = 0, \quad (8.2)$$

gdzie oznaczono $u_{,xx} = \partial^2 u / \partial x^2$, $u_{,yy} = \partial^2 u / \partial y^2$.

Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego można wyrazić całkę powierzchniową (lub objętościową gdy rozwiązujemy zadanie 3D) w obszarze Ω przez całkę obliczoną na konturze (lub powierzchni) obszaru:

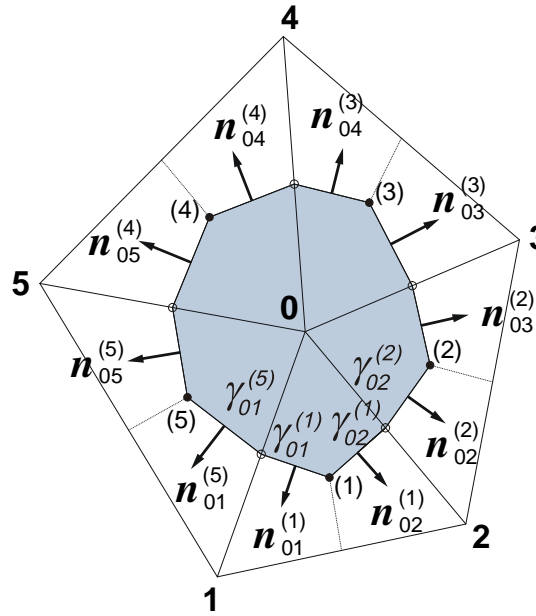
$$\int_{\Gamma} (u_{,x} n_x + u_{,y} n_y) d\Gamma + \int_{\Omega} p(x, y) d\Omega = 0, \quad (8.3)$$

gdzie Γ oznacza brzeg obszaru, a n_x i n_y są składowymi wektora normalnego do tego brzegu. Wyrażając pierwszą całkę przy pomocy sumy oraz zastępując pochodne ilorazami różnicowymi otrzymamy:

$$\sum_{\Gamma} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} n_x + \frac{\Delta u}{\Delta y} n_y \right] \Delta\Gamma + \int_{\Omega} p(x, y) d\Omega = 0, \quad (8.4)$$

gdzie \sum_{Γ} oznacza sumowanie różnic skończonych na wszystkich odcinkach brzegu obszaru. Drugą całkę można obliczyć dowolną metodą numeryczną np. stosując kwadraturę Gaussa. Wyrażając ją w najprostszej postaci mamy:

$$\int_{\Omega} p(x, y) d\Omega = \bar{p} \Omega, \quad \text{gdzie } \bar{p} \text{ oznacza średnią wartość } p(x, y) \text{ w obszarze } \Omega.$$



Rys. 8.11 Obszar kontrolny w postaci 10-cio boku

Na rys. 8.11 przedstawiony jest obszar kontrolny w postaci dziesięcioboku otaczającego węzeł „0”. Zakładając, że składowa normalna wektora gradientu: du/dn jest stała na obu odcinkach brzegu $\gamma_{0i}^{(a)}, \gamma_{0i}^{(b)}$, sąsiadujących krawędzią „0- i ”, otrzymamy:

$$\sum_{\Gamma} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} n_x + \frac{\Delta u}{\Delta y} n_y \right] \Delta \Gamma = \sum_{i=1}^N (u_i - u_0) \gamma_{0i}, \quad (8.5)$$

gdzie:

$$\gamma_{0i} = \frac{\Delta y_{0i}^{(a)} + \Delta y_{0i}^{(b)}}{x_i - x_0} - \frac{\Delta x_{0i}^{(a)} + \Delta x_{0i}^{(b)}}{y_i - y_0}. \quad (8.6)$$

W równaniu tym wyeliminowane zostały składowe normalnej dzięki związkom:

$$\Delta y_{0i}^{(a)} = \Delta \Gamma_{0i}^{(a)} n_x, \quad \Delta x_{0i}^{(a)} = -\Delta \Gamma_{0i}^{(a)} n_y, \quad \Delta x_{0i}^{(a)} = \frac{1}{2}(x_i + x_0) - x_a, \quad \Delta y_{0i}^{(a)} = \frac{1}{2}(y_i + y_0) - y_a,$$

$$\Delta y_{0i}^{(b)} = \Delta \Gamma_{0i}^{(b)} n_x, \quad \Delta x_{0i}^{(b)} = -\Delta \Gamma_{0i}^{(b)} n_y, \quad \Delta x_{0i}^{(b)} = x_b - \frac{1}{2}(x_i + x_0), \quad \Delta y_{0i}^{(b)} = y_b - \frac{1}{2}(y_i + y_0).$$

Symbolem N oznaczono liczbę krawędzi siatki przechodzących przez węzeł „0” ($N=5$ dla przypadku przedstawionego na rys. 8.11), indeks a oznacza wierzchołek obszaru kontrolnego leżącego w części poprzedzającej krawędź „0- i ”, a b wierzchołek w części następniej.

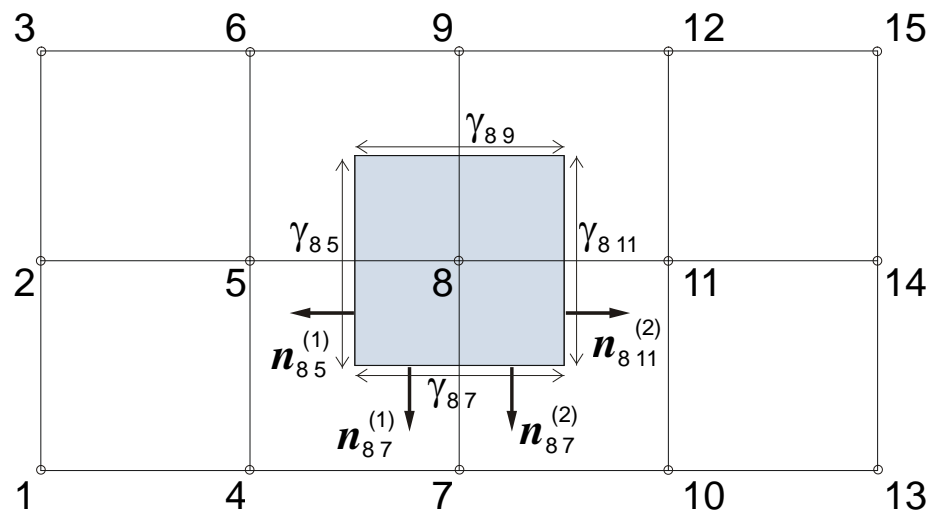
Rozwiązując zadanie identyczne z opisanym w punkcie otrzymamy zgodnie z oznaczeniami podanymi na rysunku 8.12 :

$$\Omega = a^2, \quad \bar{p} = p_0$$

$$\gamma_{87} = 0 - \frac{a/2 + a/2}{-a} = 1, \quad \gamma_{89} = 0 - \frac{-a/2 - a/2}{a} = 1,$$

$$\gamma_{811} = \frac{a/2 + a/2}{a} - 0 = 1, \quad \gamma_{85} = \frac{-a/2 - a/2}{-a} - 0 = 1,$$

gdzie zerowymi wartościami zastąpione zostały ilorazy typu 0/0 co odpowiada znikaniu iloczynu skalarnego wektora gradientu i wektora normalnego.



Rys. 8.12 Kwadratowy obszar kontrolny węzła Nr 8

Zapisując teraz równanie (8.50) dla obszaru zbudowanego wokół węzła Nr 8 otrzymamy po uwzględnieniu związków (8.51 i 8.52) równanie:

$$(u_7 - u_8) \gamma_{8,7} + (u_{11} - u_8) \gamma_{8,11} + (u_9 - u_8) \gamma_{8,9} + (u_5 - u_8) \gamma_{8,5} = -a^2 p_0, \quad (8.7)$$

które po uporządkowaniu przyjmie postać:

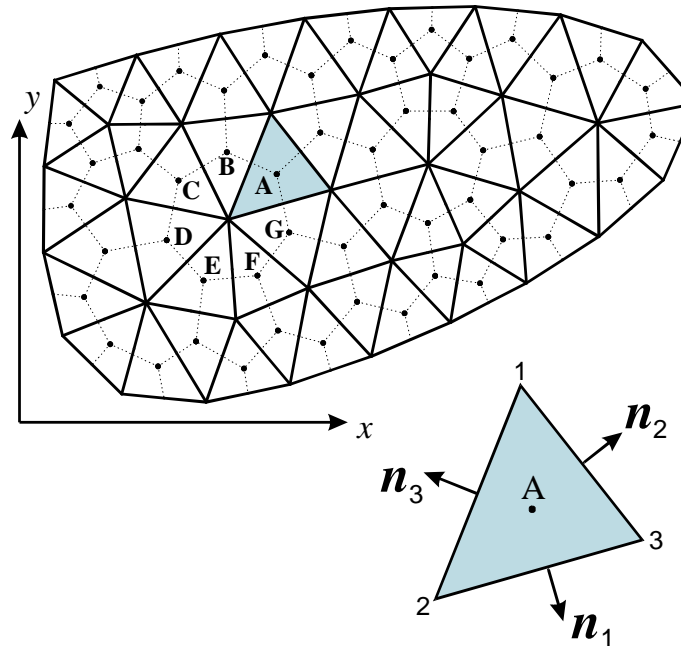
$$u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} - 4u_8 = -a^2 p_0, \quad (8.8)$$

identyczną z równaniem (8.23).

Podobnie zapisując równania dla węzłów Nr 5 i 11 otrzymamy związki (8.22) i (8.24), które po uwzględnieniu warunków brzegowych dadzą to samo rozwiązanie, które podane zostało w rozdziale poświęconym metodzie różnic skończonych. W przypadku ortogonalnej siatki dyskretyzującej obszar rozwiązania metoda objętości skończonych staje się identyczna z metodą różnic skończonych.

8.1.2 Obszar kontrolny równoważny komórce siatki

Na rys. 8.13 przedstawiony jest obszar kontrolny, którym jest komórka ograniczona krawędziami siatki dyskretyzującej obszar rozwiązania. Niewiadomymi w tym przypadku są wartości funkcji $u(x,y)$ w punktach środkowych (A, B, C, D..) leżących we wnętrzu komórek: u_A, u_B, u_C, u_D . Wartości węzłowe, występujące w równaniach, oblicza się zwykle najprostszą metodą uśredniając sąsiednie wartości: $u_A = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$ – w obszarach czworokątnych lub $u_A = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3)$ – w obszarach trójkątnych.



Rys. 8.13 Obszar kontrolny równoważny komórce siatki 2D

Równanie (8.50) pozostaje tu dalej w mocy, ale szczegółowe wyrazy sumy będą teraz odmienne od (8.51, 8.52). Dla przykładu, gdy obszar kontrolny jest czworokątem (rys. 8.14) mamy

$$\sum_{\Gamma} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} n_x + \frac{\Delta u}{\Delta y} n_y \right] \Delta \Gamma = \sum_{\alpha=A,B,C,D} (u_{\alpha} - u_0) \gamma_{\alpha}, \quad (8.9)$$

gdzie

$$\gamma_{\alpha} = \frac{\Delta y_{\alpha}}{x_{\alpha} - x_0} - \frac{\Delta x_{\alpha}}{y_{\alpha} - y_0}. \quad (8.10)$$

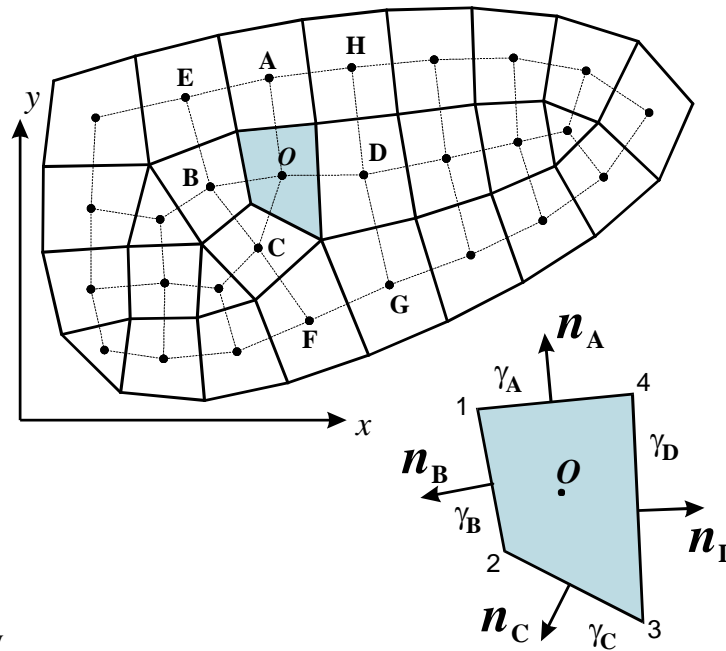
Obliczając najprostszym sposobem współrzędne punktów środkowych (uśredniając współrzędne sąsiadujących węzłów siatki) otrzymamy:

$$x_{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad y_{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i,$$

$$\Delta x_A = x_1 - x_4, \quad \Delta y_A = y_1 - y_4, \quad \Delta x_B = x_2 - x_1, \quad \Delta y_B = y_2 - y_1,$$

$$\Delta x_C = x_3 - x_2, \quad \Delta y_C = y_3 - y_2, \quad \Delta x_D = x_4 - x_3, \quad \Delta y_D = y_4 - y_3.$$

Pozwala to ułożyć równania dla wszystkich punktów środkowych, leżących wewnątrz siatki.



Rys. 8.14 Czworokątny obszar kontrolny

8.1.3 Podejście wzorowane na Metodzie Elementów Skończonych

Biorąc obszar kontrolny utworzony wokół węzła siatki i wprowadzając jawnie funkcje aproksymujące otrzymamy wersję Metody Objętości Skończonych (Kontrolnych) podobną do Metody Elementów Skończonych (MES). Analogia okazuje się jeszcze bliższa gdy zastosujemy sposób budowania (agregacji) układu równań, w którym budujemy macierz współczynników w kolejności „oczek” siatki (elementów) co pozwala utworzyć macierze geometryczne analogicznie jak tworzone są macierze sztywności w MES (por. Podgórski, Błazik-Borowa [2001]). Podejście to pokażemy na przykładzie trójkątnego oraz prostokątnego elementu siatki zastosowanego do opisanego poprzednio równania Poissona.

W książce T. J. Chunga [2002] można znaleźć przykład zastosowania elementu czworokątnego, o dowolnym kształcie, co możliwe jest po wprowadzeniu ukośnokątnych, lokalnych układów współrzędnych.

Wyrazimy poszukiwaną funkcję $u(x,y)$ w obszarze elementu „ e ” – $u^{(e)}(x,y)$, przez sumę iloczynów wartości węzłowych u_i i funkcji aproksymujących $N_i^{(e)}(x,y)$:

$$u^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^{Lw} N_i^{(e)}(x,y)u_i, \quad (8.11)$$

gdzie Lw oznacza liczbę węzłów elementu. Funkcje te w metodzie elementów skończonych noszą nazwę funkcji kształtu (por. Zienkiewicz [1972], [1994] oraz Podgórski, Błazik-Borowa [2001]) lub funkcji próbnych (por. Chung [2002]).

Po podstawieniu tego wyrażenia do (8.49) otrzymamy całkę po brzegu obszaru kontrolnego zbudowanego wokół węzła „ k ”:

$$\sum_{e=e_1}^{e_k} \sum_{i=1}^{Lw} \int_{\Gamma_k^{(e)}} (N_{i,x}^{(e)}n_x^{(e)} + N_{i,y}^{(e)}n_y^{(e)})u_i d\Gamma = \sum_{e=e_1}^{e_k} \sum_{i=1}^{Lw} G_{ki}^{(e)}u_i = \sum_{e=e_1}^{e_k} g_k^{(e)}, \quad (8.12)$$

gdzie górne indeksy (e) oznaczają numer elementu połączonego z rozważanym węzłem „ k ”, e_1 – jest numerem pierwszego elementu a e_k – numerem ostatniego elementu połączonego z węzłem, $\Gamma_k^{(e)}$ – fragmentem obwodu obszaru kontrolnego wokół węzła „ k ”, należącego do elementu e .

W równaniu (8.58) oznaczono: $G_{ki}^{(e)} = \int_{\Gamma_k^{(e)}} (N_{i,x}^{(e)}n_x^{(e)} + N_{i,y}^{(e)}n_y^{(e)})d\Gamma$, oraz $g_k^{(e)} = \sum_{i=1}^{Lw} G_{ki}^{(e)}u_i$. Składowe $G_{ki}^{(e)}$ macierzy geometrycznej $\mathbf{G}^{(e)}$ oznaczają wpływ i -tego węzła

elementu (e), na wartość całki po brzegu obszaru kontrolnego utworzonego wokół węzła „ k ”, składowa $g_k^{(e)}$ wektora węzłowego $\mathbf{g}^{(e)}$, jest udziałem całego elementu (e) w tej całce – równanie (8.49).

8.1.3.1 Element trójkątny

Przyjmujemy liniowe funkcje kształtu: $N_i(x,y) = a_{0i} + x a_{xi} + y a_{yi}$, gdzie stałe a_{0i} , a_{xi} , a_{yi} są tak dobrane aby funkcja $N_i(x,y)$ przybierała w węźle „ i ” wartość jednostkową i zerowe wartości w pozostałych węzłach elementu. Warunek ten można wyrazić w zwężonej postaci następująco:

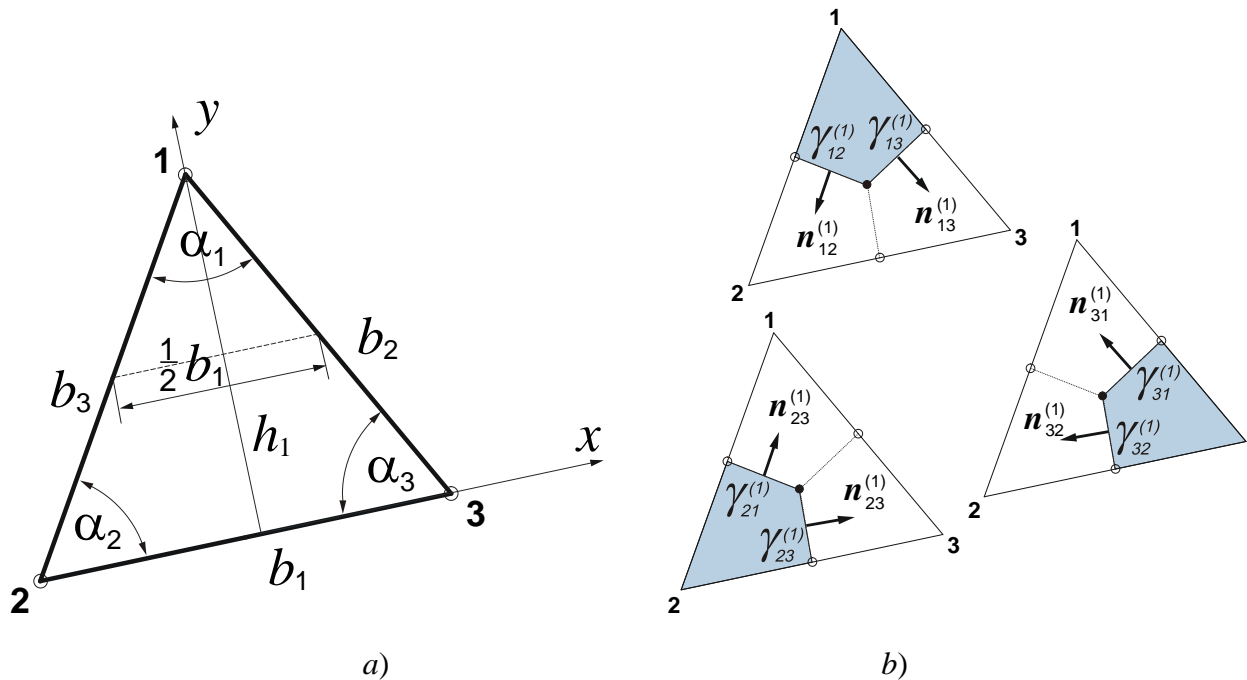
$$N_i^{(e)}(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad (8.13)$$

gdzie delta Kroneckera – $\delta_{ij}=1$ gdy $i = j$, lub 0 gdy $i \neq j$.

Przyjęcie liniowej kształtu pozwala łatwo obliczyć wartość całki w równaniu (8.58):

$$G_{ki}^{(e)} = \sum \left(a_{xi}^{(e)} n_{kx}^{(e)} + a_{yi}^{(e)} n_{ky}^{(e)} \right) \gamma_k^{(e)}, \quad (8.14)$$

gdzie $\gamma_k^{(e)}$ oznacza tą część obwodu obszaru kontrolnego wokół węzła „k”, która należy do elementu „e”, a n_{kx}, n_{ky} są składowymi wektora normalnego do tego brzegu, sumowanie odbywa się po wszystkich odcinkach brzegu.



Rys. 8.15 Element trójkątny i lokalny układ współrzędnych

Obliczymy teraz wartości składowych G_{ki} macierzy geometrycznej elementu trójkątnego pokazanego na rys. 8.15. Tak przyjęty lokalny układ współrzędnych daje następujące wartości stałych „a” funkcji $N_1(x,y)$: $a_{01} = 0$, $a_{x1} = 0$, $a_{y1} = 1/h_1$, gdzie h_1 jest wysokością trójkąta poprowadzoną z wierzchołka „1”. Ponieważ fragment brzegu obszaru kontrolnego wokół węzła „1”, należący do jednego elementu składa się z dwóch odcinków o długości γ_{12} i γ_{13} to składowa G_{11} sumy (8.60) w obszarze elementu trójkątnego obliczona dla funkcji $N_1(x,y)$ ma wartość:

$$G_{11}^{(e)} = \frac{1}{h_1^{(e)}} \left(n_{y12}^{(e)} \gamma_{12}^{(e)} + n_{y13}^{(e)} \gamma_{13}^{(e)} \right) = -\frac{b_1^{(e)}}{2h_1^{(e)}} = -\frac{1}{2} (\text{ctg } \alpha_2 + \text{ctg } \alpha_3), \quad (8.15)$$

gdzie b_1 jest długością boku leżącego naprzeciw wierzchołka „1”, α_2 i α_3 są kątami trójkąta leżącymi przy węzłach „2” i „3”. Podobne obliczenia dla fragmentu brzegu wokół węzła „2” dają:

$$G_{21}^{(e)} = \frac{1}{h_1^{(e)}} (n_{y21}^{(e)} \gamma_{21}^{(e)} + n_{y23}^{(e)} \gamma_{23}^{(e)}) = \frac{b_2^{(e)} \cos \alpha_3}{2h_1^{(e)}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha_3, \quad (8.16)$$

$$G_{31}^{(e)} = \frac{1}{h_1^{(e)}} (n_{y31}^{(e)} \gamma_{31}^{(e)} + n_{y32}^{(e)} \gamma_{32}^{(e)}) = \frac{b_3^{(e)} \cos \alpha_2}{2h_1^{(e)}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha_2, \quad (8.17)$$

gdzie b_2 i b_3 są długościami boków leżących naprzeciw wierzchołków „2” i „3”.

Podobne obliczenia należy przeprowadzić dla funkcji kształtu $N_2(x,y)$ oraz $N_3(x,y)$.

Zbierając wszystkie obliczone składowe w macierz otrzymamy zależność:

$$\mathbf{g}^{(e)} = \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (8.18)$$

lub w postaci rozwiniętej:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(c_2 + c_3) & c_3 & c_2 \\ c_3 & -(c_1 + c_3) & c_1 \\ c_2 & c_1 & -(c_1 + c_2) \end{bmatrix}^{(e)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^{(e)}, \quad (8.19)$$

gdzie $c_i = \operatorname{ctg} \alpha_i$, a wektor $\mathbf{u}^{(e)} = [u_i]^{(e)}$ zawiera wartości węzłowe poszukiwanej funkcji $u(x,y)$ w węzłach sąsiadujących z elementem (e) .

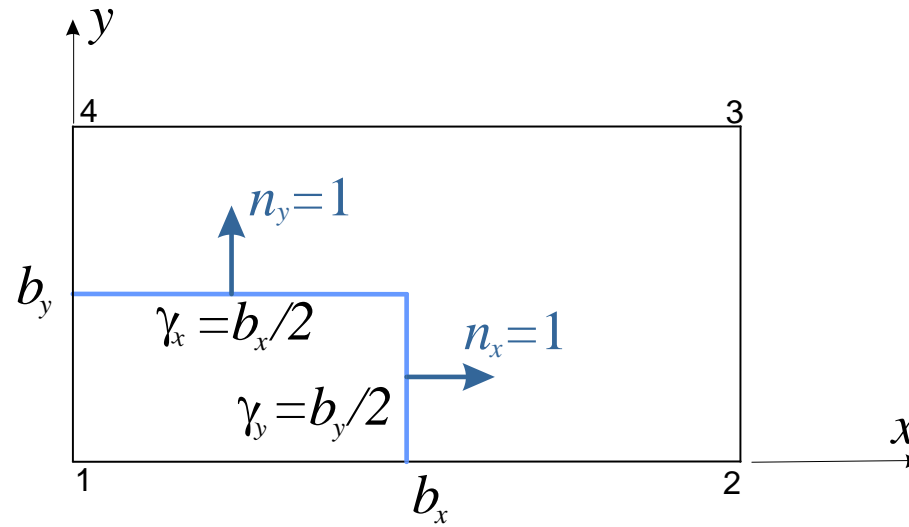
8.1.3.2 Element prostokątny

Równania (8.57) i (8.58) pozostają również w mocy dla innych typów elementów. Pokażemy teraz przykład wyznaczania macierzy geometrycznej \mathbf{G} elementu prostokątnego o bokach b_x , b_y , który pokazany jest na rys. 8.16.

Funkcje kształtu $N_i(x,y)$, gdzie $i=1..4$ – jest lokalnym numerem węzła elementu, powinny spełniać warunek (8.59). Najprostszą postacią takiej funkcji jest wielomian postaci: $N(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$, który można otrzymać biorąc iloczyn funkcji liniowych:

$\xi = x/b_x$, $\xi' = 1 - \xi$, $\eta = y/b_y$, $\eta' = 1 - \eta$. Odpowiednie wielomiany przyjmują wtedy postać:

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= (1-\xi)(1-\eta), & N_2(x,y) &= \xi(1-\eta), \\ N_3(x,y) &= \xi\eta, & N_4(x,y) &= (1-\xi)\eta. \end{aligned} \quad (8.20)$$



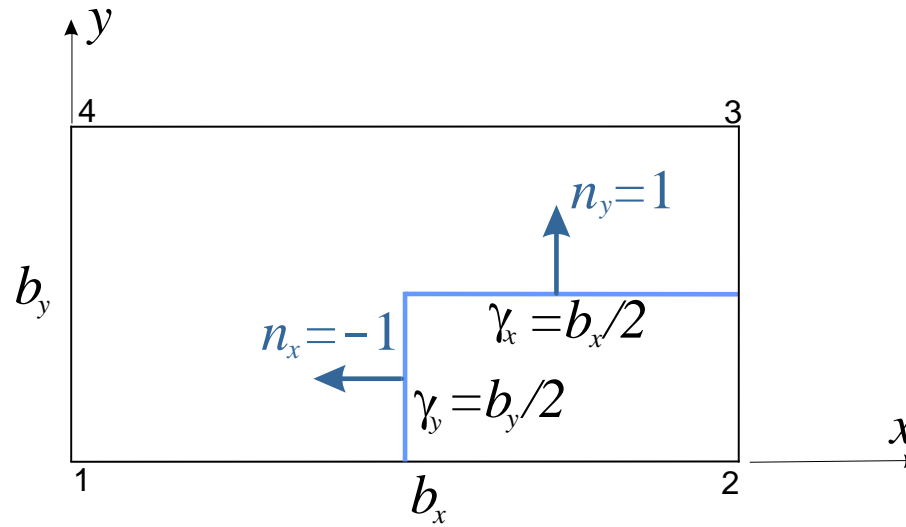
Rys. 8.16a Element prostokątny o bokach b_x b_y . Zaznaczono brzeg obszaru kontrolnego wokół węzła 1

Aby wyznaczyć składowe macierzy geometrycznej $\mathbf{G}^{(e)}$ należy wykonać całkowania opisane równaniami (8.12).

Wykonajmy teraz szczegółowe obliczenia składowych pierwszego wiersza macierzy $\mathbf{G}^{(e)}$:

$$G_{11}^{(e)} = \int_{\Gamma_1^{(e)}} (N_{1,x}^{(e)} n_x^{(e)} + N_{1,y}^{(e)} n_y^{(e)}) d\Gamma = \int_0^{b_y/2} N_{1,x}^{(e)} \cdot 1 dy + \int_0^{b_x/2} N_{1,y}^{(e)} \cdot 1 dx = \frac{b_y}{b_x} \int_0^{0.5} -(1-\eta) d\eta + \frac{b_x}{b_y} \int_0^{0.5} -(1-\xi) d\xi =$$

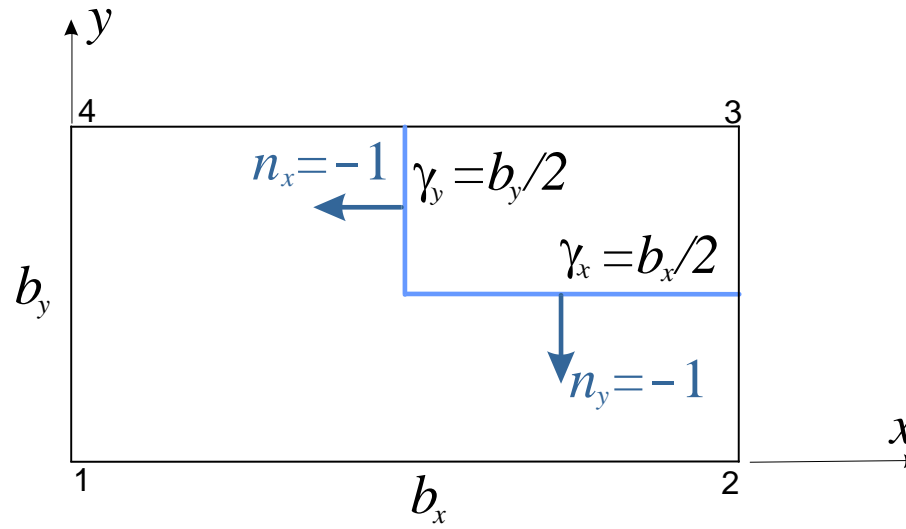
$$-\lambda \left[\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_0^{0.5} - \frac{1}{\lambda} \left[\xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_0^{0.5} = -\frac{3}{8} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right),$$



Rys. 8.16b Element prostokątny o bokach b_x b_y . Zaznaczono brzeg obszaru kontrolnego wokół węzła 2

$$G_{21}^{(e)} = \int_{\Gamma_2^{(e)}} \left(N_{1,x}^{(e)} n_x^{(e)} + N_{1,y}^{(e)} n_y^{(e)} \right) d\Gamma = \int_0^{b_y/2} N_{1,x}^{(e)} \cdot (-1) dy + \int_{b_x/2}^{b_x} N_{1,y}^{(e)} \cdot 1 dx = \frac{b_y}{b_x} \int_0^{0.5} (1-\eta) d\eta + \frac{b_x}{b_y} \int_{0.5}^{1.0} -(1-\xi) d\xi =$$

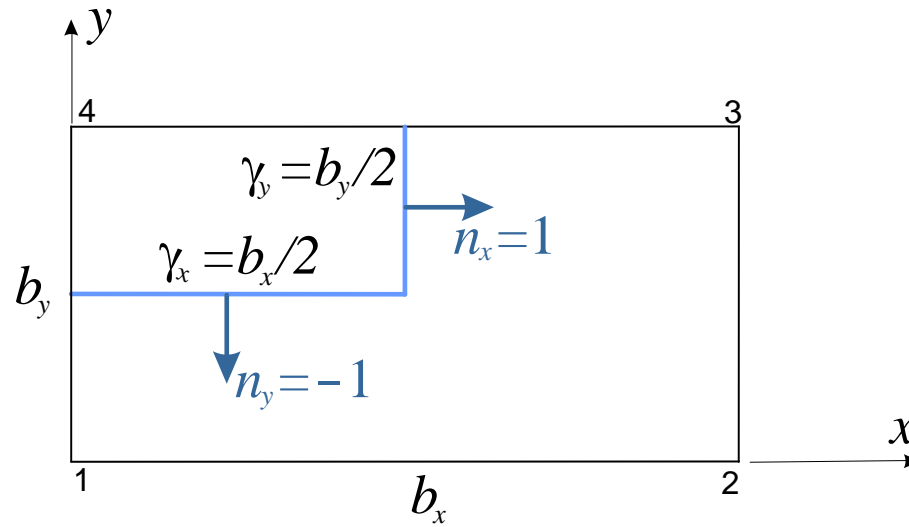
$$\lambda \left[\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_0^{0.5} - \frac{1}{\lambda} \left[\xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_{0.5}^{1.0} = \frac{1}{8} \left(-\lambda + \frac{3}{\lambda} \right),$$



Rys. 8.16c Element prostokątny o bokach b_x b_y . Zaznaczono brzeg obszaru kontrolnego wokół węzła 3

$$G_{31}^{(e)} = \int_{\Gamma_2^{(e)}} \left(N_{1,x}^{(e)} n_x^{(e)} + N_{1,y}^{(e)} n_y^{(e)} \right) d\Gamma = \int_{b_y/2}^{b_y} N_{1,x}^{(e)} \cdot (-1) dy + \int_{b_x/2}^{b_x} N_{1,y}^{(e)} \cdot (-1) dx = \frac{b_y}{b_x} \int_{0.5}^{1.0} (1-\eta) d\eta + \frac{b_x}{b_y} \int_{0.5}^{1.0} (1-\xi) d\xi =$$

$$\lambda \left[\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_{0.5}^{1.0} + \frac{1}{\lambda} \left[\xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_{0.5}^{1.0} = \frac{1}{8} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right),$$



Rys. 8.16d Element prostokątny o bokach b_x b_y . Zaznaczono brzeg obszaru kontrolnego wokół węzła 4

$$G_{41}^{(e)} = \int_{\Gamma_2^{(e)}} \left(N_{1,x}^{(e)} n_x^{(e)} + N_{1,y}^{(e)} n_y^{(e)} \right) d\Gamma = \int_{b_y/2}^{b_y} N_{1,x}^{(e)} \cdot 1 dy + \int_0^{b_x/2} N_{1,y}^{(e)} \cdot (-1) dx = \frac{b_y}{b_x} \int_{0.5}^{1.0} (1-\eta) d\eta + \frac{b_x}{b_y} \int_0^{0.5} (1-\xi) d\xi =$$

$$\lambda \left[\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_{0.5}^{1.0} - \frac{1}{\lambda} \left[\xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_0^{0.5} = \frac{1}{8} \left(3\lambda - \frac{1}{\lambda} \right).$$

Po wykonaniu pozostałych całkowań w obszarze elementu otrzymujemy macierz geometryczną $\mathbf{G}^{(e)}$ elementu prostokątnego w postaci:

$$\mathbf{G}^{(e)} = \frac{1}{8} (\lambda + 1/\lambda) \begin{bmatrix} -3 & 1+2\kappa & 1 & 1-2\kappa \\ 1+2\kappa & -3 & 1-2\kappa & 1 \\ 1 & 1-2\kappa & -3 & 1+2\kappa \\ 1-2\kappa & 1 & 1+2\kappa & -3 \end{bmatrix}, \quad (8.21)$$

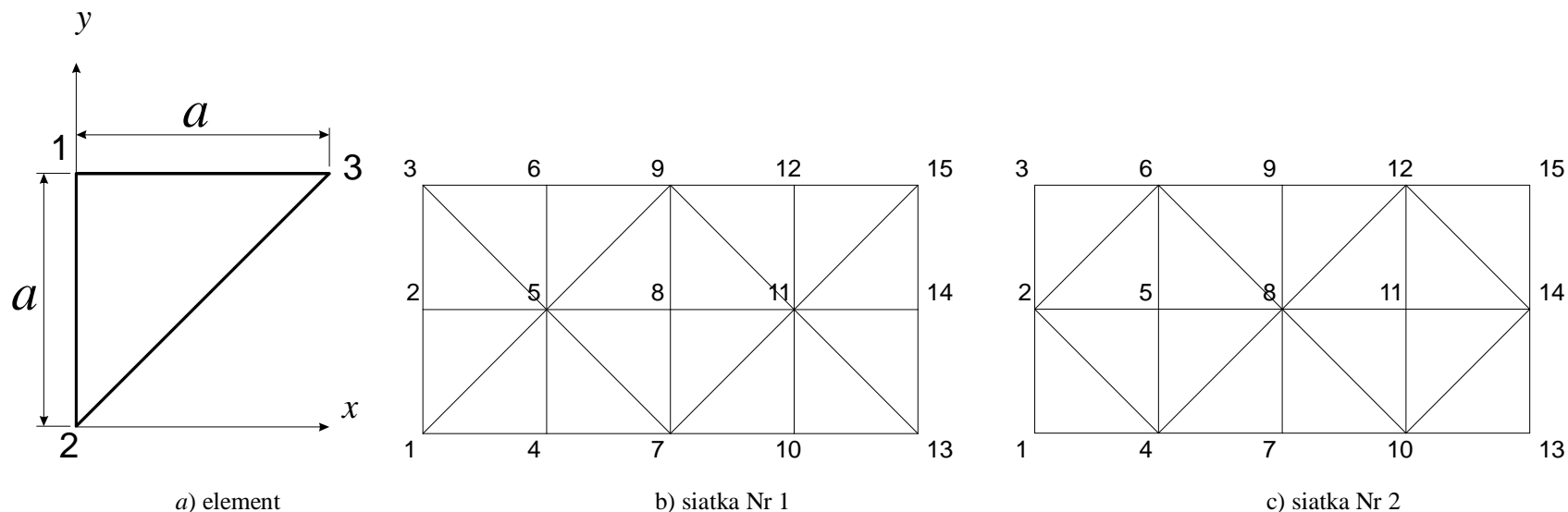
gdzie $\lambda = b_x/b_y$, $\kappa = (1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)$.

W przypadku siatki o oczkach kwadratowych mamy: $\lambda = 1$, $\kappa = 0$, macierz geometryczna znacznie się upraszcza:

$$\mathbf{G}^{(e)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (8.21a).$$

8.1.3.3 Przykłady tworzenia układu równań

Wyniki otrzymane w równaniach (8.19) i (8.21) posłużą teraz do porównania różnych postaci układu równań, który otrzymujemy w celu wyznaczenia wartości węzłowych u_i poszukiwanej funkcji $u(x,y)$ stosując opisane typy elementów. Posłużymy się w tym celu tym samym przykładem, który uprzednio rozwiązany został metodą różnic skończonych oraz metodą objętości skończonych w p. 8.1.1.



Rys. 8.17 Element trójkątny oraz dwie różne siatki dyskretyzujące obszar rozwiązania

Element trójkątny o bokach: $b_1 = a\sqrt{2}$, $b_2 = a$, $b_3 = a$ i powierzchni $A = \frac{1}{2}a^2$, pokazany na rysunku 8.17a. Wartości kotangensów wynoszą: $c_1 = \text{ctg}\alpha_1 = 0$, $c_2 = \text{ctg}\alpha_2 = 1$, $c_3 = \text{ctg}\alpha_3 = 1$. Macierz geometryczna tego elementu jest zatem równa:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Budując obszar kontrolny wokół węzła Nr 8 (rys. 8.17b) otrzymamy:

$$\sum_{e \in \mathbb{I}} \mathbf{g}_8^{(e)} = -\Omega p_0, \text{ lub w postaci rozwiniętej:} \quad (8.22)$$

$$0,5 (u_5 + u_7 - 2 u_8) + 0,5 (u_7 + u_{11} - 2 u_8) +$$

$$+ 0,5 (u_{11} + u_9 - 2 u_8) + 0,5 (u_9 + u_5 - 2 u_8) = -\Omega p_0,$$

które po uporządkowaniu przyjmie postać:

$$u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} - 4u_8 = -\Omega p_0, \quad (8.23)$$

podobną do otrzymanej w równaniu (8.23). Wielkość obszaru kontrolnego Ω jest tu nieco mniejsza niż w równaniu (8.23) i wynosi $\Omega_1 = 4 \cdot \frac{A}{3} = \frac{2}{3} a^2$.

Przyjmując siatkę elementów o nieco innym kształcie (rys. 8.17c) otrzymamy $\Omega_2 = 8 \cdot \frac{A}{3} = \frac{4}{3} a^2$, a zatem więcej niż w równaniu (8.23). Wartość średnia obszarów kontrolnych obu siatek jest równa $\Omega = a^2$, tzn. tyle ile obliczona w równaniu (8.23).

Element kwadratowy o boku a , zastosowany do dyskretyzacji tego samego obszaru daje znacznie bardziej rozbudowany układ równań, co spowodowane jest wyższym stopniem wielomianu interpolacyjnego zastosowanego jako funkcja kształtu tego elementu – por. równanie (8.66). Macierz geometryczna elementu kwadratowego ($\lambda=1, \kappa=0$) obliczona na podstawie (8.67) jest równa:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Obszar kontrolny zbudowany z tych elementów wokół węzła Nr 8 (rys. 8.17) implikuje równanie:

$$(u_5 + u_4 + u_7 - 3 u_8) + (u_7 + u_{10} + u_{11} - 3 u_8) +$$

$$(u_{11} + u_{12} + u_9 - 3 u_8) + (u_9 + u_6 + u_5 - 3 u_8) = -4 \Omega p_0, \quad (8.24)$$

które po niewielkich przekształceniach przyjmuje postać:

$$(u_4 + u_{10} + u_{12} + u_6) + 2 (u_5 + u_7 + u_{11} + u_9) - 12 u_8 = -4 a^2 p_0. \quad (8.25)$$

Powierzchnia obszaru kontrolnego $\Omega = a^2$ jest tu taka sama jak w równaniu (8.23). Wypisując podobne równania dla węzłów 5 i 11 (por. rys. 8.6) i uwzględniając warunki $u_i=0$ na brzegach obszaru, otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix} = 2a^2 p_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.26)$$

Po jego rozwiązaniu otrzymujemy wartości węzłowe poszukiwanej funkcji $u(x,y)$ $u_5 = u_{11}$, $u_{11} = 0,41176 a^2 p_0$, $u_8 = 0,47059 a^2 p_0$, nieco różniące się od rozwiązania równania (8.25). Porównując to rozwiązanie z wartością dokładną, dostaniemy błąd równy +3,315%, a więc nieco mniejszy niż błąd rozwiązania uzyskanego metodą różnic skończonych.

8.1.3.4 Przykłady rozwiązania równania Poissona za pomocą systemu KAM

FEAS/KAM jest edukacyjnym systemem wspomagającym nauczanie Metody Elementów Skończonych. System został opracowany w Zakładzie Oprogramowania Inżynierskiego Politechniki Warszawskiej pod kierunkiem Zbigniewa Kacprzyka. Celem podsystemu KAM jest realizacja podstawowych funkcji rachunku macierzowego wzbogaconych o generowanie macierzy Metody Elementów Skończonych. Opracowany zestaw komend umożliwia komponowanie algorytmów analizy statycznej (w zakresie liniowym i nieliniowym) oraz dynamicznej przy zastosowaniu Metody Elementów Skończonych. Wersje 1.0 i 1.1 podsystemu FEAS/KAM dostępne są bezpłatnie. Autorami systemu są: Z. Grodzki, J. Jankowski, Z. Kacprzyk, M. Maj, J. Orysiak, B. Pawlak, B. Pawłowska, M. Sokół, T. Sokół.

Metoda Objętości Skończonych nie jest w systemie uwzględniona, tak więc operacje konstrukcji macierzy geometrycznych będziemy musieli wykonać metodami inicjowania macierzy wartościami wyliczonymi na podstawie równania (8.21).

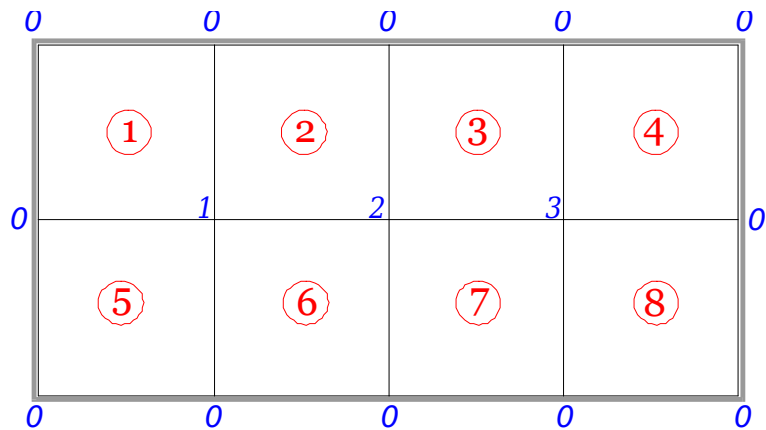
Rozwiązany zostanie tu wielokrotnie omawiany przykład równania Poissona w obszarze prostokątnym o wymiarach $4a \times 2a$ z zerowymi warunkami na brzegu. Równanie Poissona opisuje ugięcie błony napiętej na brzegu obszaru stałym naciągiem i poddanej wewnątrz obszaru działaniu stałego ciśnienia, co można opisać równaniem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -p_0,$$

gdzie p_0 oznacza iloraz $p_0 = q_0/T_0$, q_0 jest stałym ciśnieniem a T_0 stałym naciągiem błony.

Zadanie Nr 1

Rozwiązane zostanie równanie Poissona przy podziale obszaru na 8 kwadratowych pól, jak pokazano na rysunku 8.18a. Jak widać tylko 3 węzły siatki o numerach: 1, 2, 3 mają nieznanne przemieszczenia, pozostałe węzły leżące na brzegu mają przemieszczenia równe 0. Na rysunku węzły brzegowe oznaczone są numerem 0, co spowoduje, że system KAM automatycznie wyzeruje w nich przemieszczenia.



Rys. 8.18a Podział obszaru błony na 8 kwadratowych pól

Macierz geometryczną pola nr 1 wyznaczmy na podstawie równania:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ podobnie jak w punkcie 8.1.3.3.}$$

Pozostałe podobszary są identyczne, więc ich macierze geometryczne zostaną przyjęte analogicznie.

Powierzchnia obszaru kontrolnego zbudowanego wokół węzła siatki jest równa $\Omega = a^2$.

Macierze globalne zadania są równe:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p},$$

$$\begin{bmatrix} -3.0000 & 0.5000 & 0.0000 \\ 0.5000 & -3.0000 & 0.5000 \\ 0.0000 & 0.5000 & -3.0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = a^2 p_0 \begin{bmatrix} -1.000 \\ -1.000 \\ -1.000 \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.41176 \\ 0.47059 \\ 0.41176 \end{bmatrix} a^2 p_0$$

Wartość dokładna ugięcia maksymalnego wynosi $u_{\max} = 0.45549 a^2 p_0$

Maksymalna wartość obliczona $u_2=0.47059 a^2 p_0$

Błąd obliczeń: $e = (1 - u_2/u_{\max}) \cdot 100\% = 3.315\%$

Komendy systemu KAM rozwiązujące zadanie

! Obszar prostokątny $2a \times 4a$ podzielono na 8 kwadratowych pól o wymiarach $a \times a$

! Tworzenie macierzy geometrycznej kwadratowego obszaru kontrolnego

```
dm G1 4 4 -0.75 0.25
```

! Wektory alokacji obszarów kontrolnych, węzły brzegowe numerowane są jako 0

```
imi AL1 4
```

```
0 1 0 0
```

```
imi AL2 4
```

```
1 2 0 0
```

```
imi AL3 4
```

```
2 3 0 0
```

```
imi AL4 4
```

```
3 0 0 0
```

```
imi AL5 4
```

```
0 0 1 0
```

```
imi AL6 4
```

```
0 0 2 1
```

```
imi AL7 4
```

```
0 0 3 2
```

```
imi AL8 4
```

```
0 0 0 3
```

!Globalna macierz geometryczna

```
dm G 3 3
```

```
da1 G G1 AL1
```

```
da1 G G1 AL2
```

```
da1 G G1 AL3
```

```
da1 G G1 AL4
```

```
da1 G G1 AL5
```

```
da1 G G1 AL6
```

```
da1 G G1 AL7
```

```
da1 G G1 AL8
```

! Tworzenie wektora prawej strony

```
im p 3 1
```

```
-1 -1 -1
```

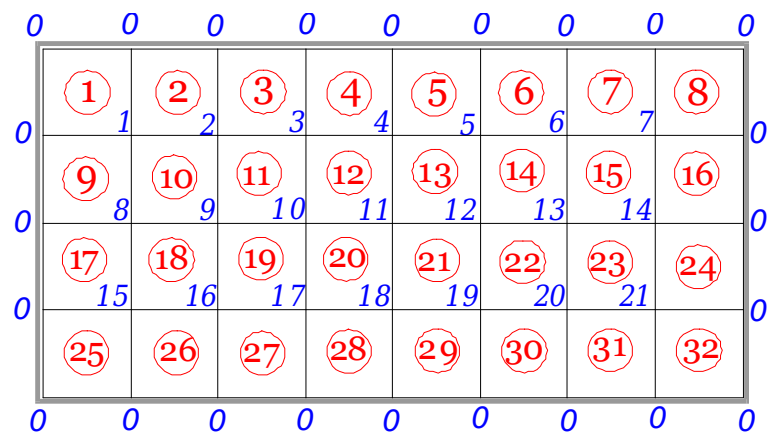
! Rozwiązanie układu równań

```
ro G p
```

```
ws p
```

Zadanie Nr 2

W zadaniu Nr 2 rozwiązano równanie Poissona przy podziale obszaru na 32 kwadratowe pola, jak pokazano na rysunku 8.18b. Jak widać tylko 21 węzłów siatki o numerach: 1÷21 mają nieznanne przemieszczenia, pozostałe węzły leżące na brzegu mają przemieszczenia równe 0. Na rysunku węzły brzegowe oznaczone są numerem 0, co spowoduje, że system KAM automatycznie wyzeruje w nich przemieszczenia.



Rys. 8.18b Podział obszaru błony na 32 kwadratowe pola

Macierz geometryczna pola nr 1 jest identyczna jak w zadaniu poprzednim

$$\mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Pozostałe podobszary są identyczne, więc ich macierze geometryczne zostaną przyjęte analogicznie.

Powierzchnia obszaru kontrolnego zbudowanego wokół węzła siatki jest równa $\Omega = 0.25 a^2$.

Macierze globalne (w macierzy \mathbf{G} pokazano tylko elementy niezerowe) zadania są równe:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p},$$

Komendy systemu KAM rozwiązujące zadanie

! Obszar prostokątny $2a \times 4a$ podzielono na 32 kwadratowych pól o wymiarach $a/2 \times a/2$

! Na brzegu ugięcie błony jest równe zero, ponumerowano tylko węzły siatki o nieznanym przemieszczeniu

! Tworzenie macierzy geometrycznej kwadratowego obszaru kontrolnego

! Wszystkie oczka siatki są identyczne, więc tworzymy tylko jedną macierz geometryczną

!

```
dm G1 4 4 -0.75 0.25
```

! Wektory alokacji obszarów kontrolnych, węzły brzegowe numerowane są jako 0

```
imi AL1 4
0 1 0 0
imi AL2 4
1 2 0 0
imi AL3 4
2 3 0 0
imi AL4 4
3 4 0 0
imi AL5 4
4 5 0 0
imi AL6 4
5 6 0 0
imi AL7 4
6 7 0 0
imi AL8 4
7 0 0 0
imi AL9 4
0 8 1 0
imi AL10 4
8 9 2 1
imi AL11 4
9 10 3 2
imi AL12 4
10 11 4 3
imi AL13 4
11 12 5 4
imi AL14 4
12 13 6 5
imi AL15 4
13 14 7 6
imi AL16 4
14 0 0 7
imi AL17 4
0 15 8 0
```

```
imi AL18 4
15 16 9 8
imi AL19 4
16 17 10 9
imi AL20 4
17 18 11 10
imi AL21 4
18 19 12 11
imi AL22 4
19 20 13 12
imi AL23 4
20 21 14 13
imi AL24 4
21 0 0 14
imi AL25 4
0 0 15 0
imi AL26 4
0 0 16 15
imi AL27 4
0 0 17 16
imi AL28 4
0 0 18 17
imi AL29 4
0 0 19 18
imi AL30 4
0 0 20 19
imi AL31 4
0 0 21 20
imi AL32 4
0 0 0 21
!Globalna macierz geometryczna
dm G 21 21
da1 G G1 AL1
da1 G G1 AL2
da1 G G1 AL3
da1 G G1 AL4
da1 G G1 AL5
da1 G G1 AL6
da1 G G1 AL7
da1 G G1 AL8
da1 G G1 AL9
da1 G G1 AL10
```

da1 G G1 AL11
da1 G G1 AL12
da1 G G1 AL13
da1 G G1 AL14
da1 G G1 AL15
da1 G G1 AL16
da1 G G1 AL17
da1 G G1 AL18
da1 G G1 AL19
da1 G G1 AL20
da1 G G1 AL21
da1 G G1 AL22
da1 G G1 AL23
da1 G G1 AL24
da1 G G1 AL25
da1 G G1 AL26
da1 G G1 AL27
da1 G G1 AL28
da1 G G1 AL29
da1 G G1 AL30
da1 G G1 AL31
da1 G G1 AL32

! Tworzenie wektora prawej strony wartości $-p_0 \cdot a^{2/4}$

im p 21 1

21*-0.25

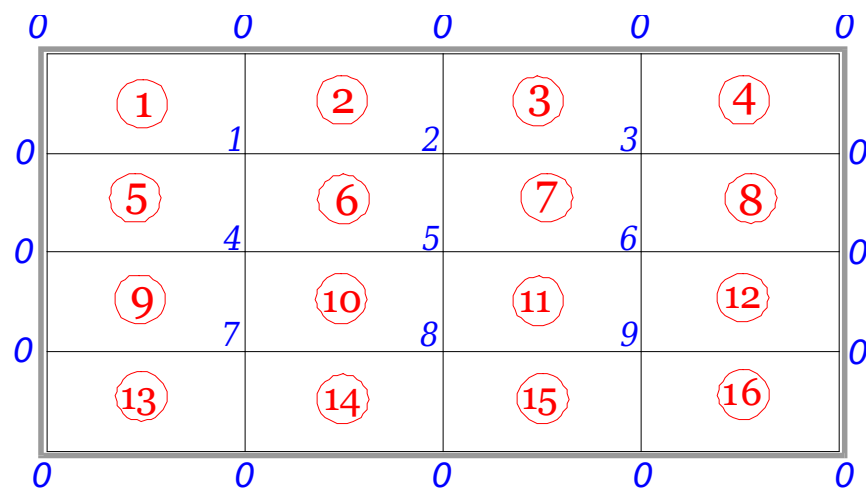
! Rozwiązanie układu równań

ro G p

ws p

Zadanie Nr 3

W zadaniu Nr 3 rozwiązano równanie Poissona przy podziale obszaru na 16 prostokątnych pól, jak pokazano na rysunku 8.18c. Jak widać tylko 9 węzłów siatki o numerach: 1÷9 ma nieznanne przemieszczenia, pozostałe węzły leżące na brzegu mają przemieszczenia równe 0. Na rysunku węzły brzegowe oznaczone są numerem 0, co spowoduje, że system KAM automatycznie wyzeruje w nich przemieszczenia.



Rys. 8.18c Podział obszaru błony na 16 prostokątnych pól

Macierz geometryczna pola nr 1 jest wyznaczona z równania (8.21):

$$\mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{8}(\lambda + 1/\lambda) \begin{bmatrix} -3 & 1+2\kappa & 1 & 1-2\kappa \\ 1+2\kappa & -3 & 1-2\kappa & 1 \\ 1 & 1-2\kappa & -3 & 1+2\kappa \\ 1-2\kappa & 1 & 1+2\kappa & -3 \end{bmatrix}.$$

Wymiary wszystkich pól są identyczne: $b_x = a$, $b_y = a/2$, co daje: $\lambda = 2$, $\kappa = -0.6$.

Macierz geometryczna pola po wyliczeniu wartości jest równa:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.9375 & -0.0625 & 0.3125 & 0.6875 \\ -0.0625 & -0.9375 & 0.6875 & 0.3125 \\ 0.3125 & 0.6875 & -0.9375 & -0.0625 \\ 0.6875 & 0.3125 & -0.0625 & -0.9375 \end{bmatrix}$$

Wszystkie pola siatki są identyczne, więc ich macierze geometryczne zostaną przyjęte analogicznie.

Powierzchnia obszaru kontrolnego zbudowanego wokół węzła siatki jest równa $\Omega = 0.5 a^2$.

Macierze globalne (w macierzy **G** pokazano tylko elementy niezerowe) zadania są równe:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p},$$

| | | | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|-----------------|------|
| -3.75 | 1.375 | _____ | -0.125 | 0.3125 | _____ | _____ | _____ | _____ | · | u_1 | -0.5 |
| 1.375 | -3.75 | 1.375 | 0.3125 | -0.125 | 0.3125 | _____ | _____ | _____ | | u_2 | -0.5 |
| _____ | 1.375 | -3.75 | _____ | 0.3125 | -0.125 | _____ | _____ | _____ | | u_3 | -0.5 |
| -0.125 | 0.3125 | _____ | -3.75 | 1.375 | _____ | -0.125 | 0.3125 | _____ | | u_4 | -0.5 |
| 0.3125 | -0.125 | 0.3125 | 1.375 | -3.75 | 1.375 | 0.3125 | -0.125 | 0.3125 | | $u_5 = a^2 p_0$ | -0.5 |
| _____ | 0.3125 | -0.125 | _____ | 1.375 | -3.75 | _____ | 0.3125 | -0.125 | | u_6 | -0.5 |
| _____ | _____ | _____ | -0.125 | 0.3125 | _____ | -3.75 | 1.375 | _____ | | u_7 | -0.5 |
| _____ | _____ | _____ | 0.3125 | -0.125 | 0.3125 | 1.375 | -3.75 | 1.375 | | u_8 | -0.5 |
| _____ | _____ | _____ | 0.3125 | -0.125 | _____ | 1.375 | -3.75 | _____ | | u_9 | -0.5 |

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy: $\mathbf{u} =$

| |
|---------|
| 0.30794 |
| 0.40208 |
| 0.30794 |
| 0.35086 |
| 0.46647 |
| 0.35086 |
| 0.30794 |
| 0.40208 |
| 0.30794 |

$a^2 p_0$

Wartość dokładna ugięcia maksymalnego wynosi $u_{\max} = 0.45549 a^2 p_0$

Maksymalna wartość obliczona $u_5 = 0.46647 a^2 p_0$

Błąd obliczeń: $e = (1 - u_5/u_{\max}) \cdot 100\% = 2.41\%$

Komendy systemu KAM rozwiązujące zadanie

! Obszar prostokątny $2a \times 4a$ podzielono na 16 prostokątnych pól o wymiarach $a \times a/2$

! Na brzegu ugięcie błony jest równe zero, ponumerowano tylko węzły siatki o nieznanymi przemieszczeniach

! Tworzenie macierzy geometrycznej kwadratowego obszaru kontrolnego

! Wszystkie oczka siatki są identyczne, więc tworzymy tylko jedną macierz geometryczną

```
!
! -----
! | -3  1+2k  1  1-2k |
! G1=(t+1/t)/8*| 1+2k -3  1-2k  1 |      t=bx/by=2   k=(1-t^2)/(1+t^2)=-0.6
! | 1  1-2k -3  1+2k |      1+2k=-0.2  1-2k=2.2
! | 1-2k  1  1+2k -3 |      (t+1/t)/8=0.3125
! -----
!
```

```
im G1 4 4
-3.0 -0.2 1.0 2.2
-0.2 -3.0 2.2 1.0
1.0 2.2 -3.0 -0.2
2.2 1.0 -0.2 -3.0
```

```
sk G1 0.3125
```

```
ws G1
```

! Wektory alokacji obszarów kontrolnych, węzły brzegowe numerowane są jako 0

```
imi AL1 4
```

```
0 1 0 0
```

```
imi AL2 4
```

```
1 4 0 0
```

```
imi AL3 4
```

```
4 7 0 0
```

```
imi AL4 4
```

```
7 0 0 0
```

```
imi AL5 4
```

```
0 2 1 0
```

```
imi AL6 4
```

```
2 5 4 1
```

```
imi AL7 4
```

```
5 8 7 4
```

```
imi AL8 4
```

```
8 0 0 7
```

```
imi AL9 4
```

```
0 3 2 0
```

```
imi AL10 4
```

```
3 6 5 2
```

```
imi AL11 4
```

```
6 9 8 5
```

```
imi AL12 4
```

```
9 0 0 8
```

```
imi AL13 4
```

```
0 0 3 0
```

```
imi AL14 4
```

```
0 0 6 3
```

```
imi AL15 4
```

```
0 0 9 6
```

```
imi AL16 4
```

```
0 0 0 9
```

!Globalna macierz geometryczna

dm G 9 9

da1 G G1 AL1

da1 G G1 AL2

da1 G G1 AL3

da1 G G1 AL4

da1 G G1 AL5

da1 G G1 AL6

da1 G G1 AL7

da1 G G1 AL8

da1 G G1 AL9

da1 G G1 AL10

da1 G G1 AL11

da1 G G1 AL12

da1 G G1 AL13

da1 G G1 AL14

da1 G G1 AL15

da1 G G1 AL16

! Tworzenie wektora prawej strony

im p 9 1

9* -0.5

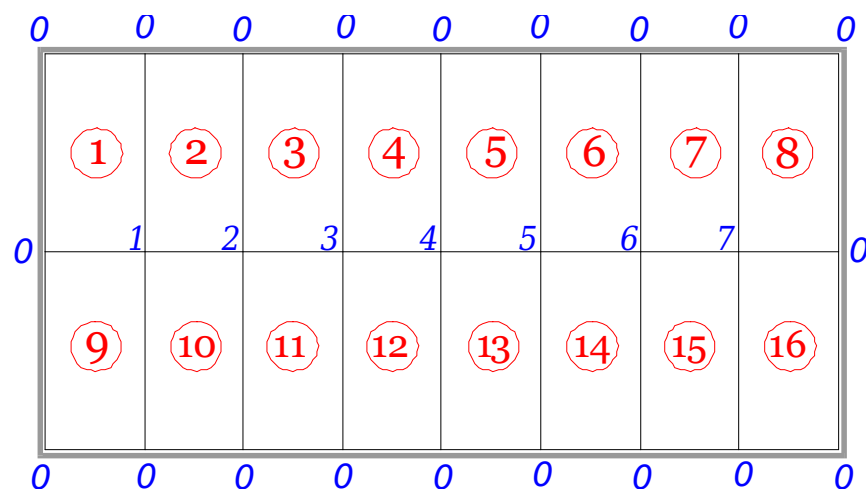
! Rozwiązanie układu równań

ro G p

ws p

Zadanie Nr 4

W zadaniu Nr 4 rozwiązano równanie Poissona przy podziale obszaru na 16 prostokątnych pól, jak pokazano na rysunku 8.18d. Jak widać tylko 7 węzłów siatki o numerach: 1÷7 ma nieznanne przemieszczenia, pozostałe węzły leżące na brzegu mają przemieszczenia równe 0. Na rysunku węzły brzegowe oznaczone są numerem 0, co spowoduje, że system KAM automatycznie wyzeruje w nich przemieszczenia.



Rys. 8.18d Podział obszaru błony na 16 prostokątnych pól

Macierz geometryczna pola nr 1 jest wyznaczona z równania (8.21):

$$\mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{8}(\lambda + 1/\lambda) \begin{bmatrix} -3 & 1+2\kappa & 1 & 1-2\kappa \\ 1+2\kappa & -3 & 1-2\kappa & 1 \\ 1 & 1-2\kappa & -3 & 1+2\kappa \\ 1-2\kappa & 1 & 1+2\kappa & -3 \end{bmatrix}.$$

Wymiary wszystkich pól są identyczne: $b_x = a/2$, $b_y = a$, co daje: $\lambda = 0.5$, $\kappa = 0.6$.

Macierz geometryczna pola po wyliczeniu wartości jest równa:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.9375 & 0.6875 & 0.3125 & -0.0625 \\ 0.6875 & -0.9375 & -0.6250 & 0.3125 \\ 0.3125 & -0.0625 & -0.9375 & 0.6875 \\ -0.0625 & 0.3125 & 0.6875 & -0.9375 \end{bmatrix}$$

Wszystkie pola siatki są identyczne, więc ich macierze geometryczne zostaną przyjęte analogicznie.

Powierzchnia obszaru kontrolnego zbudowanego wokół węzła siatki jest równa $\Omega = 0.5 a^2$.

Macierze globalne (w macierzy **G** pokazano tylko elementy niezerowe) zadania są równe:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p},$$

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|-------|------|
| -3.75 | 1.375 | _____ | _____ | _____ | _____ | _____ | · | u_1 | -0.5 |
| 1.375 | -3.75 | 1.375 | _____ | _____ | _____ | _____ | | u_2 | -0.5 |
| _____ | 1.375 | -3.75 | 1.375 | _____ | _____ | _____ | | u_3 | -0.5 |
| _____ | _____ | 1.375 | -3.75 | 1.375 | _____ | _____ | | u_4 | -0.5 |
| _____ | _____ | _____ | 1.375 | -3.75 | 1.375 | _____ | | u_5 | -0.5 |
| _____ | _____ | _____ | _____ | 1.375 | -3.75 | 1.375 | | u_6 | -0.5 |
| _____ | _____ | _____ | _____ | _____ | 1.375 | -3.75 | | u_7 | -0.5 |

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$\mathbf{u} =$$

| |
|---------|
| 0.28051 |
| 0.40139 |
| 0.45054 |
| 0.46373 |
| 0.45054 |
| 0.40139 |
| 0.28051 |

$$a^2 p_0$$

Wartość dokładna ugięcia maksymalnego wynosi $u_{\max} = 0.45549 a^2 p_0$

Maksymalna wartość obliczona $u_5 = 0.46373 a^2 p_0$

Błąd obliczeń: $e = (1 - u_4/u_{\max}) \cdot 100\% = 1.809\%$

Komendy systemu KAM rozwiązujące zadanie

! Na brzegu ugięcie błony jest równe zero, ponumerowano tylko węzły siatki o nieznanym przemieszczeniu

! Tworzenie macierzy geometrycznej kwadratowego obszaru kontrolnego

! Wszystkie oczka siatki są identyczne, więc tworzymy tylko jedną macierz geometryczną

```
!
! -----
!          |-3  1+2k  1  1-2k|
! G1=(t+1/t)/8*|1+2k -3  1-2k  1 |          t=bx/by=1/2 k=(1-t^2)/(1+t^2)=0.6
!          | 1  1-2k -3  1+2k|          1+2k=2.2  1-2k=-0.2
!          |1-2k  1  1+2k -3  |
!          -----
!          (t+1/t)/8=0.3125
!
```

```
im G1 4 4
-3.0  2.2  1.0 -0.2
 2.2 -3.0 -0.2  1.0
 1.0 -0.2 -3.0  2.2
-0.2  1.0  2.2 -3.0
sk G1 0.3125
```

! Wektory alokacji obszarów kontrolnych, węzły brzegowe numerowane są jako 0

```
imi AL1 4  
0 1 0 0  
imi AL2 4  
1 2 0 0  
imi AL3 4  
2 3 0 0  
imi AL4 4  
3 4 0 0  
imi AL5 4  
4 5 0 0  
imi AL6 4  
5 6 0 0  
imi AL7 4  
6 7 0 0  
imi AL8 4  
7 0 0 0  
imi AL9 4  
0 0 1 0  
imi AL10 4  
0 0 2 1  
imi AL11 4  
0 0 3 2  
imi AL12 4  
0 0 4 3  
imi AL13 4  
0 0 5 4  
imi AL14 4  
0 0 6 5  
imi AL15 4  
0 0 7 6  
imi AL16 4  
0 0 0 7
```

!Globalna macierz geometryczna

```
dm G 7 7  
da1 G G1 AL1  
da1 G G1 AL2  
da1 G G1 AL3  
da1 G G1 AL4  
da1 G G1 AL5  
da1 G G1 AL6  
da1 G G1 AL7
```

da1 G G1 AL8
da1 G G1 AL9
da1 G G1 AL10
da1 G G1 AL11
da1 G G1 AL12
da1 G G1 AL13
da1 G G1 AL14
da1 G G1 AL15
da1 G G1 AL16

! Tworzenie wektora prawej strony

im p 7 1

7* -0.5

! Rozwiązanie układu równań

ro G p

ws p