Kwadratury Gaussa

Porównując formuły kwadratur:

- $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$ – wzór trapezów,
- $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$ – wzór Simpsona,
- $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i)$ – wzory Newtona - Cotesa,

w których odległości miedzy węzłami aproksymacji są stałe: $x_{i+1} = x_i + h$, dochodzimy do wniosku, że można podwyższyć stopień wielomianu aproksymującego odpowiednio wyznaczając x_i. Wzór kwadratury z uzmiennionymi wartościami x_i nazywamy kwadraturą Gaussa.

Biorąc dwupunktowy wzór Gaussa mamy:

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2)$$

Po wykonaniu całkowania i podstawieniu wartości wielomianu zamiast f(x) otrzymamy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_2 x^3 + \frac{1}{4}a_3 x^4\right]_a^b = C_1(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1{}^2 + a_3 x_1{}^3) + C_2(a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2{}^2 + a_3 x_2{}^3),$$

czyli:

$$a_0(b-a)+\frac{1}{2}a_1(b^2-a^2)+\frac{1}{3}a_2(b^3-a^3)+\frac{1}{4}a_3(b^4-a^4)=C_1(a_0+a_1x_1+a_2x_1{}^2+a_3x_1{}^3)+C_2(a_0+a_1x_2+a_2x_2{}^2+a_3x_2{}^3).$$

Po uporządkowaniu równania względem współczynników a przekształcimy równanie do postaci:

$$a_0(b-a)+\frac{1}{2}a_1(b^2-a^2)+\frac{1}{3}a_2(b^3-a^3)+\frac{1}{4}a_3(b^4-a^4)=$$

$$a_0(C_1+C_2)+a_1(C_1x_1+C_2x_2)+a_2(C_1x_1{}^2+C_2x_2{}^2)+a_3(C_1x_1{}^3+C_2x_2{}^3),$$

Porównując wartości przy jednakowych współczynnikach wielomianu otrzymujemy nieliniowy układ równań:

$$C_1+C_2=b-a,$$

$$C_1x_1+C_2x_2=\frac{b^2-a^2}{2},$$

$$C_1x_1{}^2+C_2x_2{}^2=\frac{b^3-a^3}{3},$$

$$C_1x_1{}^3+C_2x_2{}^3=\frac{b^4-a^4}{4},$$

który po rozwiązaniu daje wartości współczynników wagowych i współrzędnych punktów węzłowych :

$$C_1=\frac{b-a}{2},\quad C_2=\frac{b-a}{2},\quad x_1=\frac{b+a}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}},\quad x_2=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Standaryzując granice przedziału całkowania: $a=-1,\ b=+1$ otrzymamy:

$$C_1=1,\quad C_2=1,\quad x_1=\xi_1=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_2=\xi_2=+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)d\xi \approx \frac{b-a}{2}\sum_i^n C_i f\left(\frac{b-a}{2}\xi_i+\frac{b+a}{2}\right)$$

Procedura MathCada rozwiązująca nieliniowy układ równań dla dwupunktowej kwadratury Gaussa:

Given

$$C1 + C2 = 2$$

$$C1\cdot\xi1 + C2\cdot\xi2 = 0$$

$$C1\cdot\xi1^2 + C2\cdot\xi2^2 = \frac{2}{3}$$

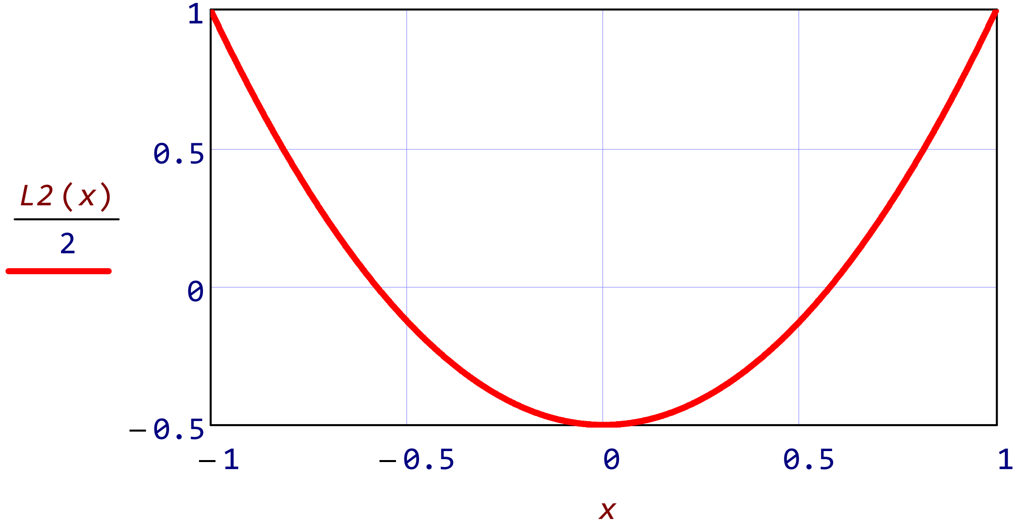
$$C1\cdot\xi1^3 + C2\cdot\xi2^3 = 0$$

$$\mathrm{Find}(C1, C2, \xi1, \xi2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Współrzędne punktów węzłowych kwadratury Gaussa są pierwiastkami wielomianów Legendra
Wielomian Legendra stopnia drugiego, L2(x) daje współrzędne wezłów dwupunktowej kwadratury:

$$L2(x) := 3\cdot x^2 - 1$$

$$L2(x)\ \mathit{solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$



Gdy znane są współrzędne punktów Gaussa (ξ_1 i ξ_2) można znaleźć współczynniki wagowe C_1 i C_2 rozwiązując układ równań liniowych **M*C = b***:*

$ORIGIN := 1$

$$\xi := \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C := \mathit{lsolve}(M, b) \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Procedura MathCada rozwiązująca nieliniowy układ równań dla trójpunktowej kwadratury Gaussa:

Given

$$C1 + C2 + C3 = 2$$

$$C1 \cdot \xi 1 + C2 \cdot \xi 2 + C3 \cdot \xi 3 = 0$$

$$C1 \cdot \xi 1^2 + C2 \cdot \xi 2^2 + C3 \cdot \xi 3^2 = \frac{2}{3}$$

$$C1 \cdot \xi 1^3 + C2 \cdot \xi 2^3 + C3 \cdot \xi 3^3 = 0$$

$$C1 \cdot \xi 1^4 + C2 \cdot \xi 2^4 + C3 \cdot \xi 3^4 = \frac{2}{5}$$

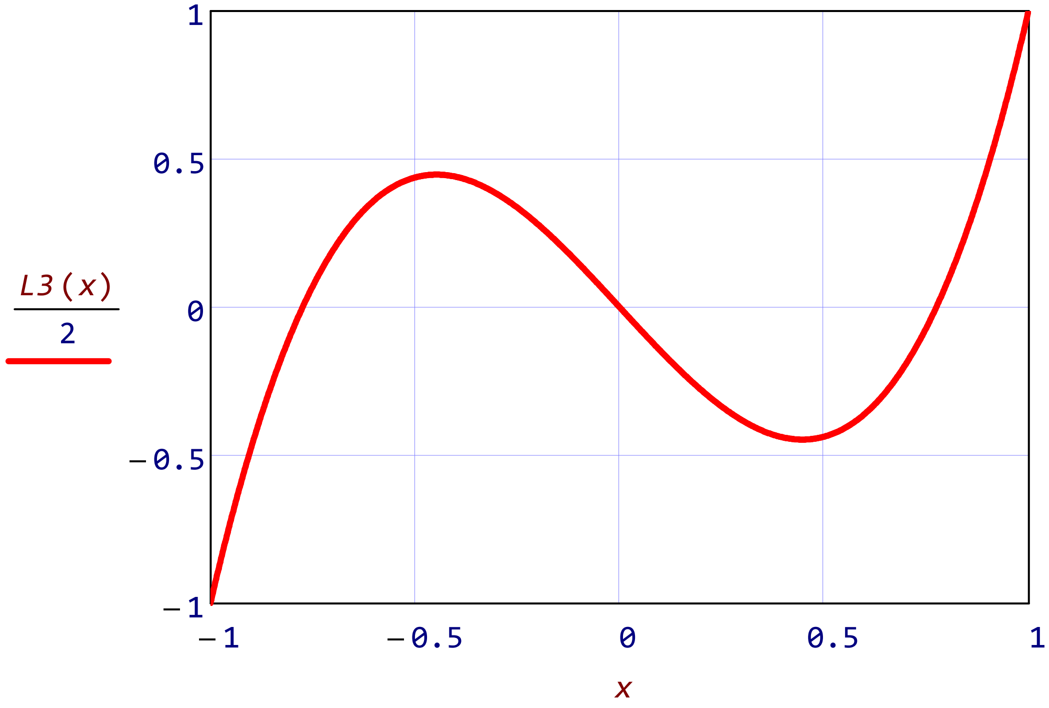
$$C1 \cdot \xi 1^5 + C2 \cdot \xi 2^5 + C3 \cdot \xi 3^5 = 0$$

$$\mathrm{Find}(C1, C2, C3, \xi 1, \xi 2, \xi 3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{8}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{8}{9} & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} & -\frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & -\frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} & -\frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} & -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wielomian Legendra stopnia trzeciego, L3(x) daje współrzędne wezłów trójpunktowej kwadratury Gaussa:

$$L3(x) := 5\cdot x^3 - 3\cdot x$$

$$L3(x)\ \mathit{solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{\sqrt{15}}{5} \\ \dfrac{\sqrt{15}}{5} \end{pmatrix}$$



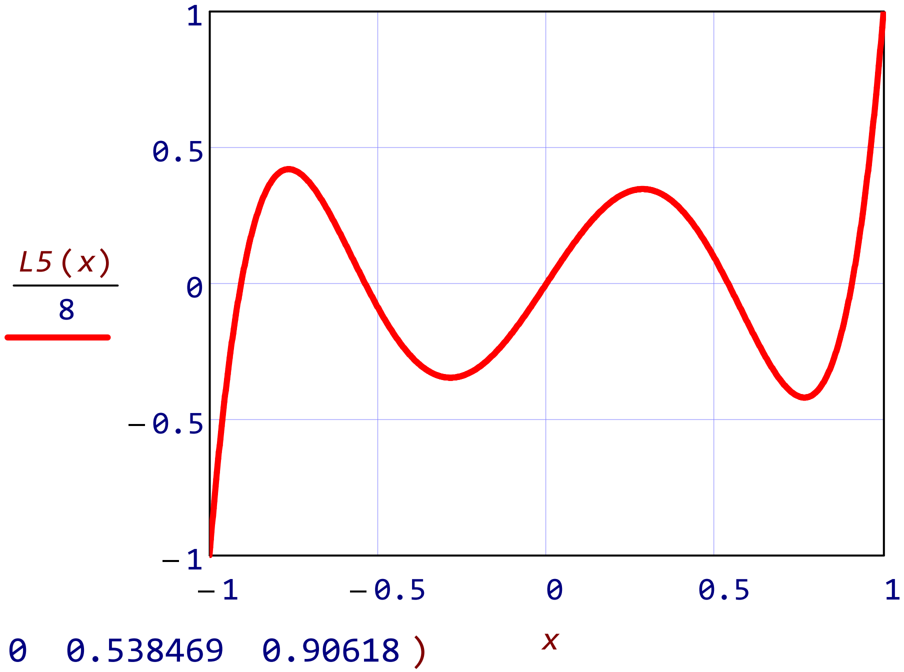
Wyznaczanie współczynników wagowych Ci

$$\xi := \begin{pmatrix} \dfrac{-\sqrt{15}}{5} \\ 0 \\ \dfrac{\sqrt{15}}{5} \end{pmatrix} \quad M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ (\xi_1)^2 & (\xi_2)^2 & (\xi_3)^2 \end{bmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \quad C := \mathit{lsolve}(M, b) \quad C = \begin{pmatrix} 0.555556 \\ 0.888889 \\ 0.555556 \end{pmatrix}$$

Wielomian Legendra stopnia 5, L5(x) daje współrzędne wezłów 5-cio punktowej kwadratury Gaussa:

$$L5(x) := 63\cdot x^5 - 70\cdot x^3 + 15\cdot x$$

$$v5 := L5(x)\ \text{coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \\ -70 \\ 0 \\ 63 \end{pmatrix}$$



Pierwiastki wielomianu L5(x):

$$\xi := \text{polyroots}(v5) \qquad \xi^T = (-0.90618 \quad -0.538469 \quad 0 \quad 0.538469 \quad 0.90618)$$

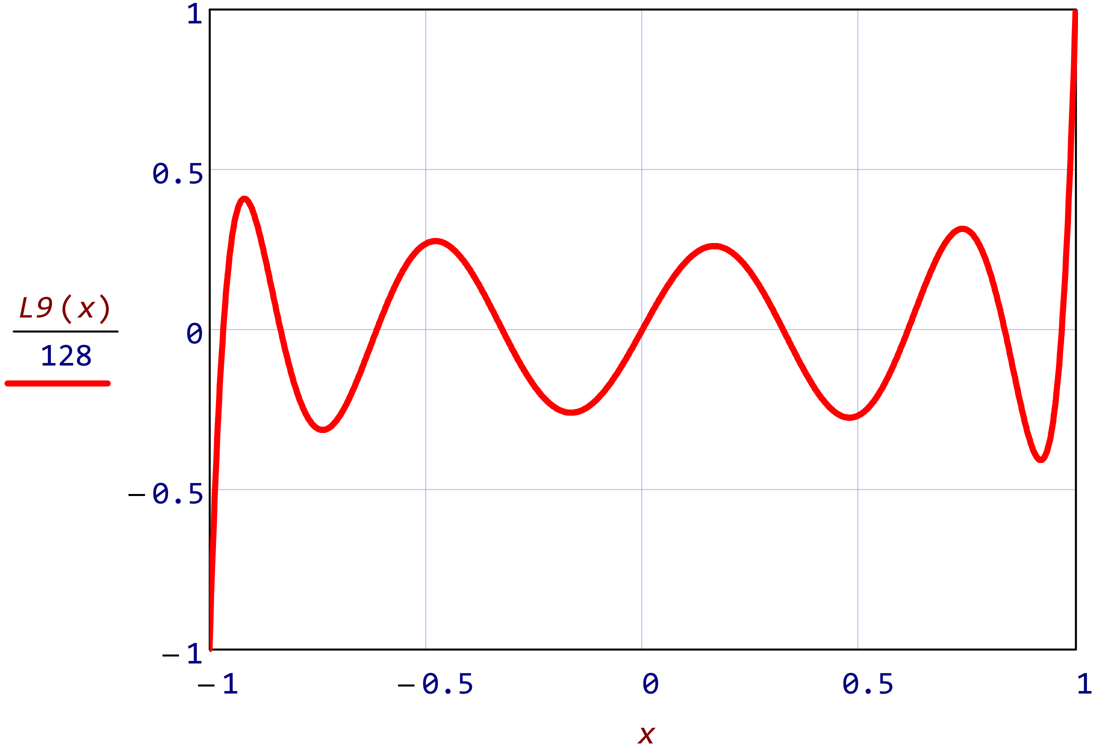
Wyznaczanie współczynników wagowych Ci

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ (\xi_1)^2 & (\xi_2)^2 & (\xi_3)^2 & (\xi_4)^2 & (\xi_5)^2 \\ (\xi_1)^3 & (\xi_2)^3 & (\xi_3)^3 & (\xi_4)^3 & (\xi_5)^3 \\ (\xi_1)^4 & (\xi_2)^4 & (\xi_3)^4 & (\xi_4)^4 & (\xi_5)^4 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \qquad C := \text{lsolve}(M, b) \qquad C = \begin{pmatrix} 0.236927 \\ 0.478629 \\ 0.568889 \\ 0.478629 \\ 0.236927 \end{pmatrix}$$

Wielomian Legendra stopnia 9, L9(x) daje współrzędne wezłów 9-cio punktowej kwadratury Gaussa:

$$L9(x) := 12155 \cdot x^9 - 25740 \cdot x^7 + 18018 \cdot x^5 - 4620 \cdot x^3 + 315 \cdot x$$

$$v9 := L9(x)\ coeffs \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 315 \\ 0 \\ -4620 \\ 0 \\ 18018 \\ 0 \\ -25740 \\ 0 \\ 12155 \end{pmatrix}$$



Pierwiastki wielomianu L9(x):

$$\xi := polyroots(v9)$$

$$\xi^T = (-0.96816\ \ -0.836031\ \ -0.613371\ \ -0.324253\ \ 0\ \ 0.324253\ \ 0.613371\ \ 0.836031\ \ 0.96816)$$

Wyznaczanie współczynników wagowych kwadratury Gaussa gdy znane są współrzędne punktów węzłowych - pierwiastki wielomianu Legendra

$ORIGIN := 0$

$M9(i, j) := \left(\xi_j\right)^i$ $\qquad m(a, b) := \dfrac{1-(-1)^{a+1}}{a+1}$ *- funkcje tworzące współczynniki układu równań*

$M := matrix(9, 9, M9)$ *- macierz układu równań*

$M =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-0.968	-0.836	-0.613	-0.324	0	0.324	0.613	0.836	0.968
2	0.937	0.699	0.376	0.105	0	0.105	0.376	0.699	0.937
3	-0.907	-0.584	-0.231	-0.034	0	0.034	0.231	0.584	0.907
4	0.879	0.489	0.142	0.011	0	0.011	0.142	0.489	0.879
5	-0.851	-0.408	-0.087	$-3.584\cdot10^{-3}$	0	$3.584\cdot10^{-3}$	0.087	0.408	0.851
6	0.824	0.341	0.053	$1.162\cdot10^{-3}$	0	$1.162\cdot10^{-3}$	0.053	0.341	0.824
7	-0.797	-0.285	-0.033	$-3.769\cdot10^{-4}$	0	$3.769\cdot10^{-4}$	0.033	0.285	0.797
8	0.772	0.239	0.02	$1.222\cdot10^{-4}$	0	$1.222\cdot10^{-4}$	0.02	0.239	0.772

$b := matrix(9, 1, m)$ *- wektor prawej strony*

$b^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0.666667 & 0 & 0.4 & 0 & 0.285714 & 0 & 0.222222 \end{pmatrix}$

$C := lsolve(M, b)$ *Współczynniki wagowe C_i oraz współrzędne ξ_i 9-cio punktowej kwadratury*

$C^T = \begin{pmatrix} 0.081274 & 0.180648 & 0.260611 & 0.312347 & 0.33024 & 0.312347 & 0.260611 & 0.180648 & 0.081274 \end{pmatrix}$

$\xi^T = \begin{pmatrix} -0.96816 & -0.836031 & -0.613371 & -0.324253 & 0 & 0.324253 & 0.613371 & 0.836031 & 0.96816 \end{pmatrix}$