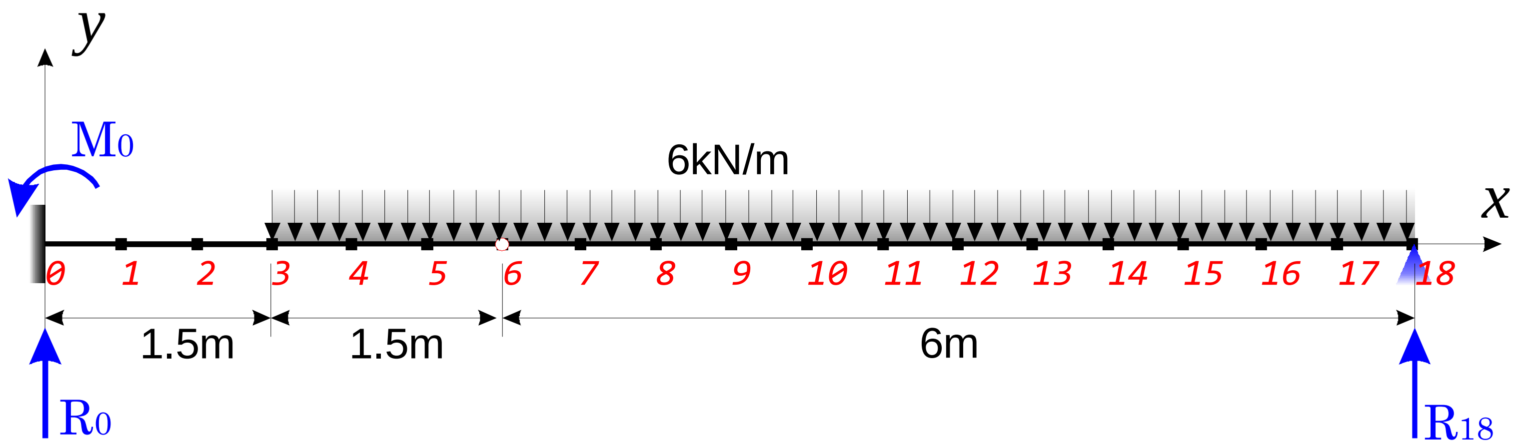
Metoda Różnic Skończonych - obliczenie ugięć belki przegubowej



$E := 1.2 \cdot 10^{7} \mathrm{kPa}$ *- moduł Younga materiału*

$b := 15\mathrm{cm}$ *- szerokość przekroju belki*

$h := 25\mathrm{cm}$ *- wyskość przekroju belki*

$J := b \cdot \frac{h^{3}}{12}$ *- moment bezwładności przekroju belki*

$L := 9\mathrm{m}$ *- długość belki*

$L1 := 1.5\mathrm{m}$ *- długość pierwszego fragmentu belki*

$n := 18$ *- liczba odcinków skończonych*

$\Delta := \frac{L}{n}$ *- długość odcinka między punktami węzłowymi*

$\alpha := \frac{\Delta^{2}}{E \cdot J}$ *- parametr zależny od sztywności belki*

Obliczenie reakcji

$q := 6\,\frac{kN}{m}$

$R18 := 3m \cdot q$ $\qquad$ $R18 = 18 \cdot kN$

$R0 := q \cdot 7.5m - R18$ $\qquad$ $R0 = 27 \cdot kN$

$M0 := q \cdot 7.5m \cdot \left(1.5 + \frac{7.5}{2}\right) m - R18 \cdot 9m$ $\qquad$ $M0 = 74.25 \cdot kN \cdot m$

$ORIGIN := 0$ *- numerowanie wierszy tablicy rozpoczynamy od zera*

$i := 0 .. n$

$x_i := i \cdot \Delta$ *- współrzędne punktów węzłowych*

$M_i := 0$ *- inicjowanie tablicy momentów*

$M1(x) := -M0 + R0 \cdot x$ *- funkcja momentu zginającego w przedziale 0...1,5m*

$M2(x) := M1(x) - q \cdot \frac{(x - L1)^2}{2}$ *- funkcja momentu zginającego w przedziale 1,5m...9m*

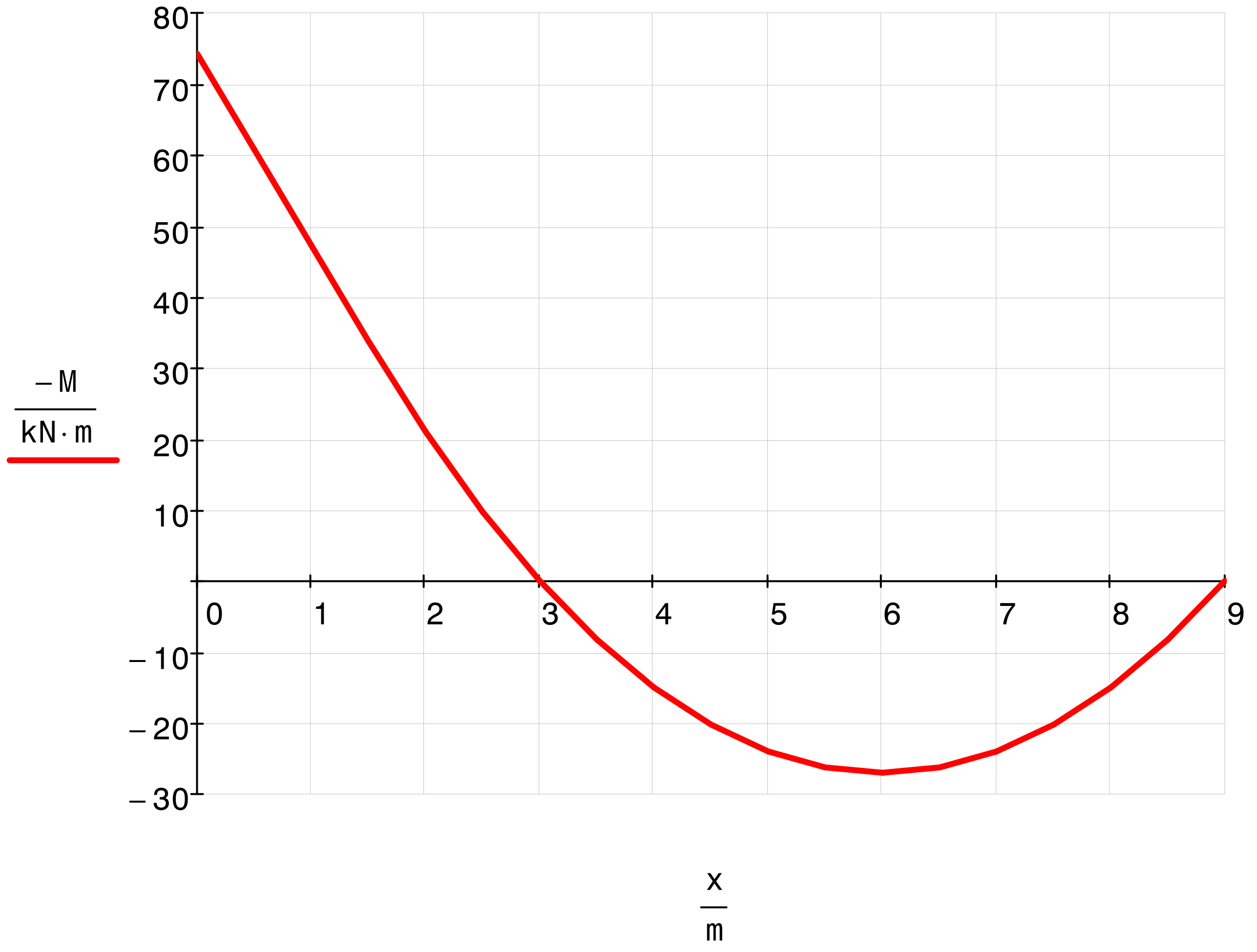
$i := 0 .. \ 3$

$M_i := M1(x_i)$ *- Obliczanie wartości momentu zginającego w przedziale 0...1,5m*

$i := 4 .. \ n$

$M_i := M2(x_i)$ *- Obliczanie wartości momentu zginającego w przedziale 1,5m...9m*

Wykres momentu zginającego



$M =$

	0
0	-74.25
1	-60.75
2	-47.25
3	-33.75
4	-21.00
5	-9.75
6	0.00
7	8.25
8	15.00
9	20.25
10	24.00
11	26.25
12	27.00
13	26.25
14	24.00
15	20.25
16	15.00
17	8.25
18	0.00

$\cdot kN \cdot m$

Warunk brzegowe belki:
$y(0)=0$, $dy(x=0)/dx = 0$, $y(L)=0$

$dy(x=x_i)/dx \approx (y_{i+1} - y_{i-1})/2\Delta = 0$ - *różnica centralna (1)*
$dy(x=x_i)/dx \approx (y_{i+1} - y_i)/\Delta = 0$ - *różnica "wprzód" (2)*

$d^2y(x=x_i)/dx^2 \approx (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/\Delta^2 = M_i/EJ$ - *równanie krzywizny belki zginanej*
dla $x=0$ *mamy:* $y_0=0$, $y_1=M_0*\Delta^2/2EJ$ *(1)* *lub* $y_0=0$, $y_1=0$ *(2)*
dla $x=L$ *mamy:* $y_{18}=0$

Układ równań piszemy dla punktów 0...5 i 7...18
dla przegubu (punkt Nr 6) nie można tego równania napisać bo belka traci ciąłość kąta obrotu przekroju,
zamiast tego można napisać równanie $y_1=\alpha M_0$ *, które wynika z warunku zerowania kąta obrotu w punkcie* 0

$A_{n,n} := 0$ - *deklaracja macierzy różnic*

$i := 0 .. n-1$

$A_{i,i} := -2$
- *tworzenie macierzy różnic*
$A_{i,i+1} := 1$

$A_{i+1,i} := 1$ $A_{n,n} := -2$

Macierz różnic skończonych

A =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2

$Wb := \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$ *- numery węzłów, w których określone są warunki brzegowe*

$d := \alpha \cdot M$ *- prawa strona układu równań*

- warunki brzegowe na podporach

$j := 0 .. \ rows(Wb) - 1$ $\qquad$ $i := 0 .. \ n$

$A_{i, Wb_j} := 0$

$A_{Wb_j, i} := 0$

$A_{Wb_j, Wb_j} := 1$ $\qquad$ $d_{(Wb_j)} := 0$

- zamiana równania nr 6 na warunek brzegowy kąta obrotu na podporze 0 --> $y_1 = \alpha M_0 / 2$ *(1)*

$A_{6, 5} := 0$ $\qquad$ $A_{6, 6} := 0$ $\qquad$ $A_{6, 7} := 0$

$A_{6, 1} := 1$ $\qquad$ $d_6 := \alpha \cdot \frac{M_0}{2}$ *- warunek brzegowy w postaci (1)*

Macierz różnic skończonych po uwzględnieniu warunków brzegowych

$A =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$d =$ (m)

	0
0	0
1	$-6.48\cdot10^{-3}$
2	$-5.04\cdot10^{-3}$
3	$-3.6\cdot10^{-3}$
4	$-2.24\cdot10^{-3}$
5	$-1.04\cdot10^{-3}$
6	$-3.96\cdot10^{-3}$
7	$8.8\cdot10^{-4}$
8	$1.6\cdot10^{-3}$
9	$2.16\cdot10^{-3}$
10	$2.56\cdot10^{-3}$
11	$2.8\cdot10^{-3}$
12	$2.88\cdot10^{-3}$
13	$2.8\cdot10^{-3}$
14	$2.56\cdot10^{-3}$
15	$2.16\cdot10^{-3}$
16	$1.6\cdot10^{-3}$
17	$8.8\cdot10^{-4}$
18	0

$|A| = 12$

$y := \mathrm{lsolve}(A, d)$ *- rozwiązanie układu równań:* A*y=d

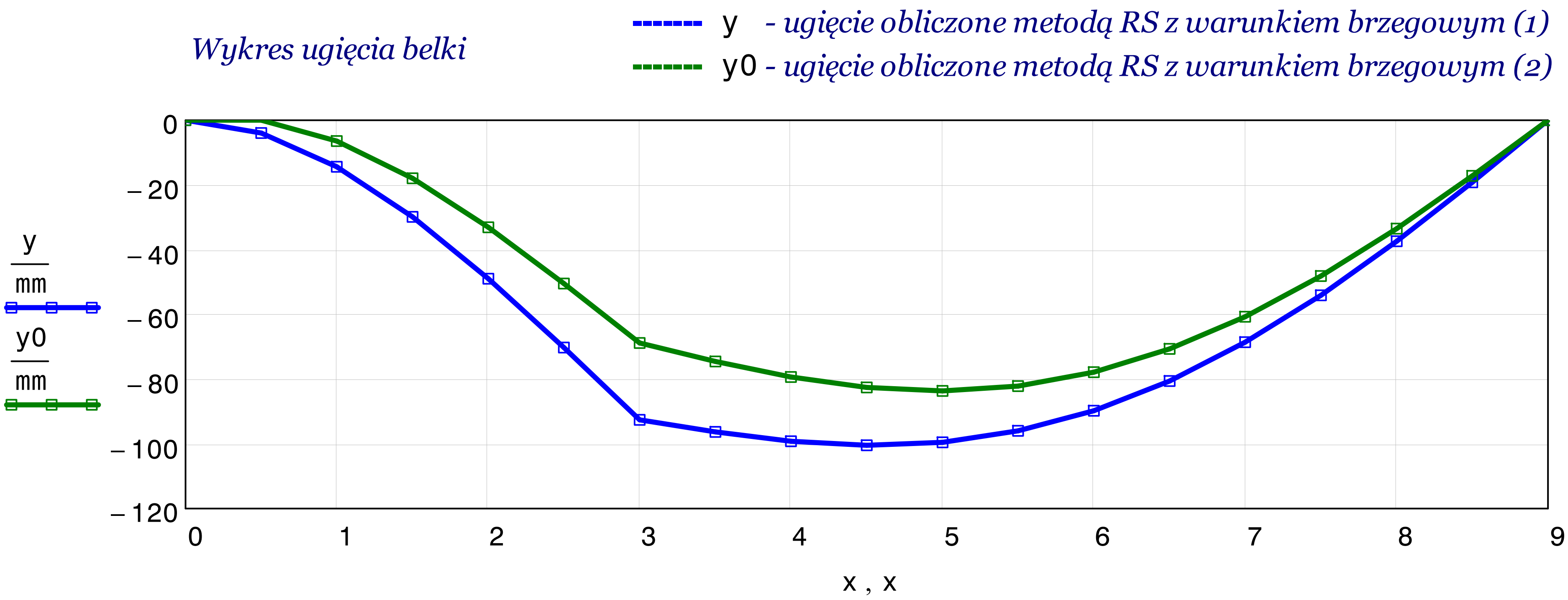
$y^T =$ (·mm)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	-3.96	-14.4	-29.88	-48.96	-70.28	-92.64	-96.36	-99.2	-100.44	-99.52	...

$d_6 := 0$ *- warunki brzegowe dla różnicy "wprzód" (2)*

$y0 := \mathrm{lsolve}(A, d)$

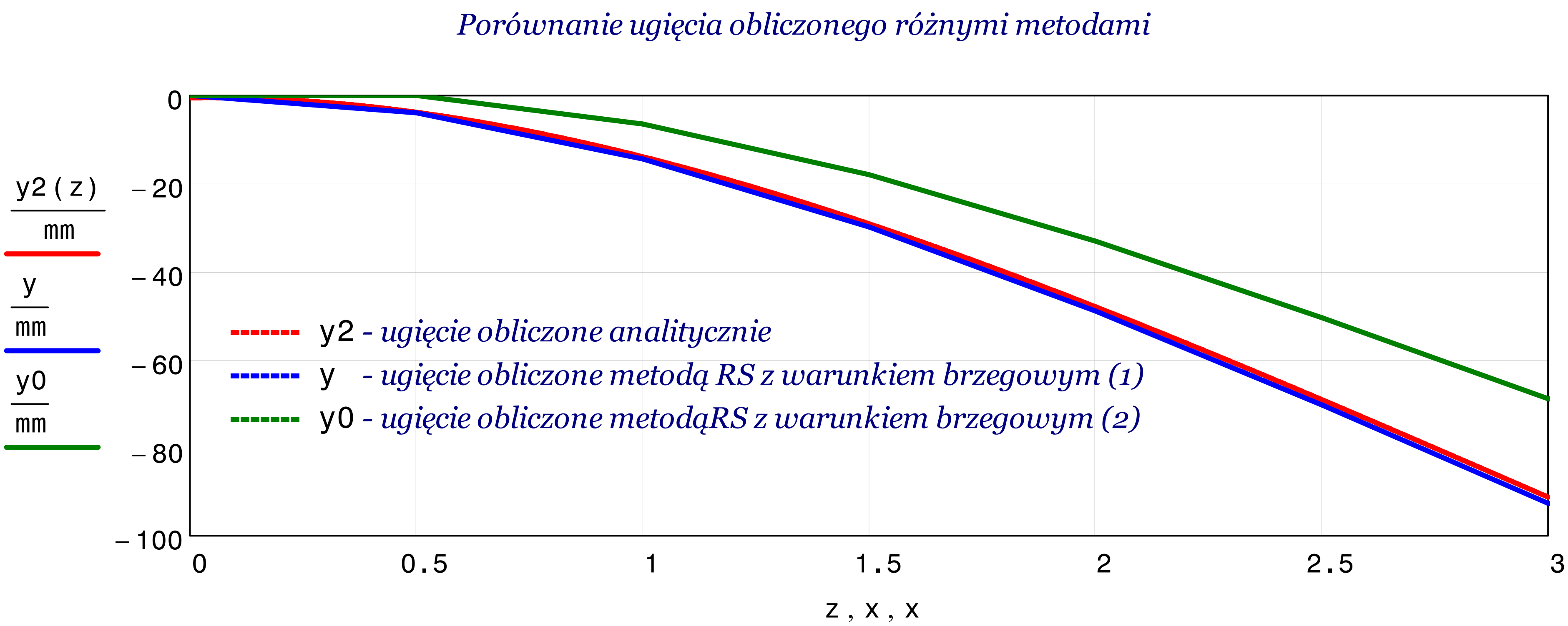
Wykres ugięcia belki



Funkcje ugięcia wyznaczone analitycznie

$$y1(z) := (R0 \cdot z - 3 \cdot M0) \cdot \frac{z^2}{6 \cdot E \cdot J}$$ *- ugięcie w przedziale* z=0...1,5m

$$y2(z) := y1(z) - \frac{q}{24 \cdot E \cdot J}(z - L1)^4$$ *- ugięcie w przedziale* z=1,5m...3,0m


Porównanie ugięcia obliczonego różnymi metodami
y2(z)/mm
y/mm
y0/mm
0
−20
−40
−60
−80
−100
y2 - ugięcie obliczone analitycznie
y - ugięcie obliczone metodą RS z warunkiem brzegowym (1)
y0 - ugięcie obliczone metodąRS z warunkiem brzegowym (2)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
z, x, x