

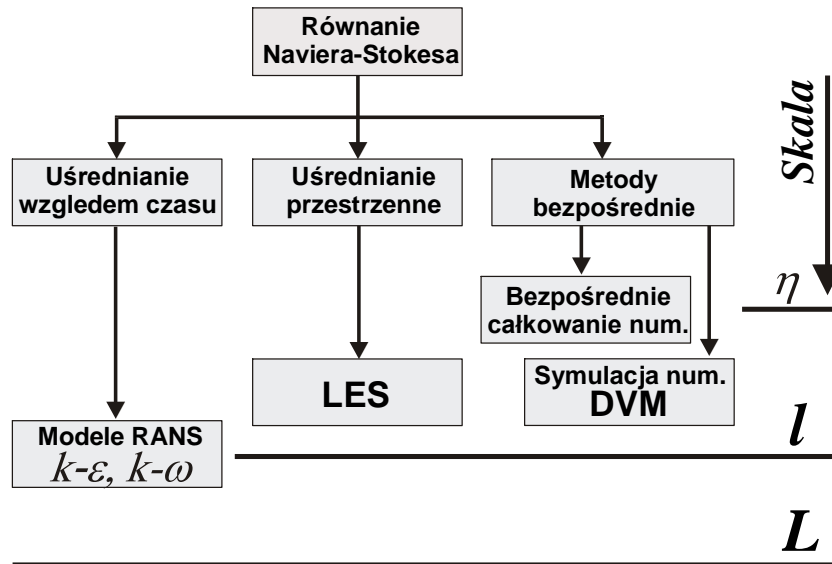
7 Modele przepływu turbulentnego

7.1 Wstęp

Ruch burzliwy płynu lepkiego, nieściśliwego opisany jest równaniami Naviera-Stokesa (N-S) (7.1), które wraz z równaniem ciągłości (7.2) stanowią kompletny układ zależności, pozwalający wyznaczyć ciśnienie oraz pole prędkości przepływu. Powodem powstania zastępczych modeli ruchu turbulentnego (zwykle bardziej skomplikowanych niż przejrzysty model N-S) jest skala problemu, który należy rozwiązać w przypadku przepływów powietrza wokół budowli lub ponad terenem. Najmniejsze wiry występujące w takich przepływach, zgodnie ze skalą Kołmogorowa (por. Chorin [1994]): $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, (ν oznacza tu lepkość molekularną a ε dysypację kinetycznej energii turbulencji), mają rozmiary rzędu 0.1÷1.0 mm (por. Murakami, Mochida [1995], Elsner [1987]). Numeryczne rozwiązanie równań N-S wymaga zatem bardzo gęstej siatki dyskretyzującej obszar przepływu. Ilość punktów węzłowych odpowiedniej siatki przestrzennej powinna być proporcjonalna do $Re^{9/4}$, gdzie $Re = u_0 L / \nu$ jest liczbą Reynoldsa, (por. Murakami [1995,1996], Chung [2002]) co wynika ze statystycznych teorii ruchu turbulentnego. Ponieważ rzeczywiste przepływy powietrza wokół budowli charakteryzuje liczba Reynoldsa $Re = 10^5 \div 10^7$ to liczbę węzłów siatki, niezbędnej do otrzymania dostatecznie dokładnego rozwiązania numerycznego równań N-S, można oszacować na $10^{11} \div 10^{16}$. Największe zadania rozwiązane metodą bezpośredniego numerycznego całkowania równań N-S (DNS – Direct Numerical Simulation) miały siatkę zawierającą $10^7 \div 10^8$ węzłów i dotyczyły przepływów scharakteryzowanych liczbą Reynoldsa rzędu 200÷5000. Większe siatki wymagałyby zbyt długiego czasu obliczeń. Metody DNS stosowane są zatem do symulacji prostych przepływów turbulentnych np. często badanych w tunelach aerodynamicznych przepływów wokół prostokąta. Rezultaty otrzymywane metodami DNS przynoszą wiele ważnych informacji służących poprawianiu innych modeli przepływów turbulentnych.

Jak widać współczesna technika komputerowa zezwala na rozwiązanie problemów o kilka rzędów wielkości mniejszych niż wymaga tego praktyka inżynierska. Modele zastępcze wymagają znacznie mniejszych siatek dyskretyzacyjnych. Korzystają one z uśrednionych w czasie (metody oparte na hipotezie Reynoldsa, np. $k - \varepsilon$) lub w przestrzeni (metoda LES - Large Eddy Simulation) równań N-S. Uśrednienie w czasie pola prędkości prowadzi do równań Reynoldsa (zastępują one równania N-S) wyrażających zasadę zachowania pędu w uśrednionym przepływie turbulentnym.

Zależność między różnymi modelami obliczeniowymi przepływu turbulentnego wg. Murakamiego i Mochidy [1995, 1996] przedstawiona jest w postaci diagramu pokazanego na rysunku 7.1.



Rys. 7.1 Zależności między modelami numerycznymi przepływu turbulentnego, η - skala Kolmogorowa, l - charakterystyczna skala wiru (rozmiar siatki całkowania), L - skala budynku, tunelu.

7.2 Równania ruchu i metody uśrednień

W modelu przepływu laminarnego stan płynu nieściśliwego jest opisany za pomocą równania Naviera-Stokesa:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}, \quad (7.1)$$

gdzie: $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ jest wektorem prędkości przepływu, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ oznaczają jednostkowe wektory bazowe, t - oznacza czas, ρ oznacza gęstość płynu, $p = p(x_1, x_2, x_3)$ oznacza ciśnienie, μ - oznacza lepkość dynamiczną, \mathbf{b} oznacza wektor sił masowych,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$ oznacza wektorowy operator Hamiltona,

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ operator Laplace'a,

oraz równania ciągłości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (7.2)$$

Przyjmując hipotezę Reynoldsa, która pozwala zapisać składowe wektora prędkości oraz pole ciśnienia jako sumy wielkości uśrednionych i fluktuacji, mamy:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad p_i = \bar{p}_i + p'_i, \quad (7.3)$$

W zależności od potrzeb i rodzaju rozpatrywanego problemu (np. płyn nieściśliwy lub ściśliwy) stosowane są różne rodzaje uśrednień w celu przekształceń równania N-S. Trzy z nich omówimy w następnych punktach tego rozdziału.

7.2.1 Uśrednianie czasowe

Wartość uśrednioną w czasie, dowolnej funkcji $u(x,t)$, definiuje się następująco:

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u(x,t) dt, \quad (7.4)$$

gdzie Δt oznacza czas uśredniania. Średnia wartość fluktuacji jest w tym przypadku równa zeru:

$$\bar{u}'(x,t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u'(x,t) dt = 0. \quad (7.5)$$

Nie dotyczy to jednak wartości średniej iloczynu dwóch fluktuacji:

$$\overline{u'w'} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u'w' dt \neq 0. \quad (7.6)$$

Ten sposób uśredniania stosowany jest powszechnie w przypadku płynów jednorodnych, nieściśliwych: $\rho = \bar{\rho} = \text{const}$.

7.2.2 Uśrednianie masowe – uśrednianie Favre’a

Wartość średnią $\bar{u}(x,t)$ definiuje tu związek:

$$\bar{\rho} \bar{u} = \overline{\rho u}, \quad \bar{u} = \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}}, \quad (7.7)$$

który pozwala zapisać wartość chwilową $u(x,t)$ w postaci:

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + u'', \quad (7.8)$$

przy czym $\overline{\rho u''} = 0$, $\bar{u}'' = -\overline{\rho' u'} / \bar{\rho} \neq 0$.

Uśrednianie Favre’a stosowane jest przy opisie ruchu płynów ściśliwych.

7.2.3 Uśrednianie przestrzenne, filtracja przestrzenna

Wartość uśrednioną w objętości Ω , podobnie jak w przypadku uśredniania czasowego, definiuje równanie:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u(x,t) d\Omega . \quad (7.9)$$

Ten typ uśredniania wiąże się też z filtracją przestrzenną zdefiniowaną równaniem:

$$\bar{u}(t) = \int f(\xi) u(\xi,t) d\xi , \quad \int f(\xi) d\xi = 1 , \quad (7.10)$$

gdzie $f(\xi)$ jest funkcją filtrującą. Biorąc $f(\xi) = \frac{1}{\Omega}$ gdy $\xi \in \Omega$ i $f(\xi)=0$ dla innych wartości ξ otrzymamy równanie (7.9). Możliwe są też inne funkcje filtrujące np. funkcja Gaussa, Fouriera (por. Chung [2002]).

7.3 Modele RANS – modele uśrednień Reynoldsa

Zakładając jednorodność i nieściśliwość płynu, $\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. oraz przyjmując hipotezę Reynoldsa (7.3) i uśrednianie czasowe (7.4), podstawimy związki (7.3) do równania ciągłości (7.2). Otrzymamy równanie wiążące średnie wartości składowych wektora prędkości (por. Elsner [1987], Chung [2002]):

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \bar{u}_{i,i} = 0 , \quad (7.11)$$

gdzie przecinkiem oznaczono różniczkowanie oraz zastosowano konwencję sumacyjną. Podstawienie związków (7.3) do równania N-S daje równanie:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_{j,i} \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_{,j} + (\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^*)_{,i} , \quad (7.12)$$

gdzie $\bar{\tau}_{ij} = \mu(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$, $\tau_{ij}^* = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ oznaczają naprężenia występujące w płynie. Składowe tensora naprężeń τ_{ij}^* są naprężeniami turbulentnymi (naprężeniami Reynoldsa).

Analogiczne przekształcenia, ale przy założeniu ściśliwości płynu oraz uśrednienia Favre'a dają równania ciągłości (7.13) oraz zachowania pędu (7.14) płynu ściśliwego:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + (\bar{\rho} \bar{u}_i)_{,i} = 0 , \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j)_{,j} = -\bar{p}_{,i} + (\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^*)_{,j} , \quad (7.14)$$

gdzie $\bar{\tau}_{ij} = \mu(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i} - \frac{2}{3}\bar{u}_{i,i}\delta_{ij})$, $\tau_{ij}^* = -\overline{\rho u_i' u_j'}$ a δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera ($\delta_{ij}=1$ gdy $i = j$, lub $\delta_{ij}=0$ gdy $i \neq j$).

Tensor naprężeń Reynoldsa występujący w równaniach (7.12) lub (7.14) jest przyczyną pewnych kłopotów wszystkich modeli RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations), gdyż dodaje nowe niewiadome wielkości do układu równań, który staje się teraz nie zamknięty i wymaga dodatkowych równań wiążących składowe tensora τ_{ij}^* . Te dodatkowe równania (domknięcia modelu Reynoldsa) stanowią o różnicach między modelami przepływu turbulentnego należącymi do rodziny RANS.

7.3.1 Model Boussinesqua

Najstarszym sposobem domknięcia równań Reynoldsa jest model Boussinesqua z roku 1877 (por. Elsner [1987]), który związał składowe tensora Reynoldsa τ_{ij}^* ze składowymi tensora prędkości deformacji $\bar{\tau}_{ij}$:

$$\tau_{ij}^* = -\mu_T(u_{i,j} + u_{j,i}), \text{ czyli } -\overline{u_i u_j} = \nu_T(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (7.15)$$

unikając w ten sposób tworzenia dodatkowych równań. Współczynnik $\nu_T = \mu_T / \rho$ występujący w równaniu Boussinesqua nazywany jest współczynnikiem kinematycznej lepkości turbulentnej, jest to skalarna funkcja współrzędnych przestrzennych. Jak jednak łatwo wykazać dla płynu nieściśliwego składowe diagonalne tego tensora muszą zniknąć, co wynika z równań ciągłości. Prowadzi to do sprzeczności, gdyż składowe $\tau_{ii}^* = -\overline{\rho u_i' u_i'}$ znikają tylko wtedy gdy brak jest jakichkolwiek fluktuacji prędkości, co ma miejsce tylko w przepływie ustalonym. Usunięcie tej sprzeczności możliwe jest np. przez przyjęcie, że współczynnik ν_T jest funkcją tensorową współrzędnych przestrzennych (por. Elsner [1987]).

7.3.2 Model Prandtla i jego modyfikacje

Drugim modelem bez dodatkowych równań domykających był model Prandtla, bazujący na jego koncepcji drogi mieszania w warstwie przyściennej (por. Launder i Spalding [1972]). Model ten rozwijany był później przez Theodora von Karmana i innych badaczy (por. Chung [2002]). Współczynnik kinematycznej lepkości turbulentnej występujący w równaniu (7.15) Prandtl określił następująco:

$$\nu_T = \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|, \quad (7.16)$$

ℓ oznacza tu drogę mieszania określoną równaniem $\ell = \kappa y$, gdzie y jest współrzędną prostopadłą do ściany a κ stałą von Karmana, $\kappa = 0,41$. Naprężenia Reynoldsa w warstwie przyściennej są zatem równe:

$$\tau_{xy}^* = \rho \ell^2 \left[\frac{d\bar{u}}{dy} \right]^2, \quad (7.17)$$

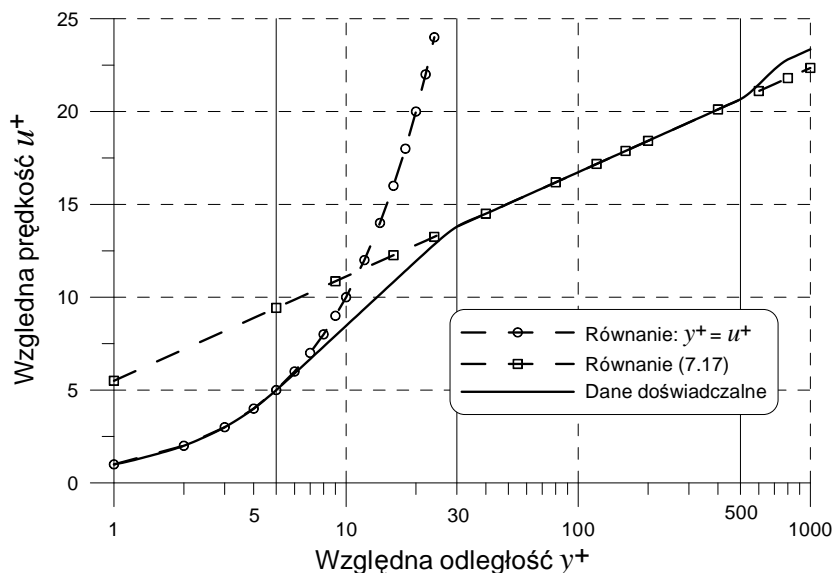
gdzie x jest współrzędną równoległą do ściany a y – prostopadłą do ściany. Całkowanie tego równania oraz wyznaczenie stałych całkowania na podstawie badań doświadczalnych daje tzw. „funkcję ściany”:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5,5 \quad , \quad (7.18)$$

gdzie u^+ oraz y^+ są bezwymiarowymi wartościami prędkości i odległości od ściany:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_0} \quad , \quad y^+ = \frac{y u_0}{\nu} \quad , \quad \nu \text{ – jest kinematycznym współczynnikiem lepkości płynu a } u_0$$

prędkością porównawczą. W małej odległości od ściany $0 \leq y^+ \leq 5$ zależność (7.18) nie daje wartości zgodnych z doświadczeniem. Poprawne wartości daje natomiast prosty związek $y^+ = u^+$. Rysunek 7.2 pokazuje zgodność tych równań z danymi doświadczalnymi.



Rys. 7.2. Porównanie danych doświadczalnych z wynikami przewidywanymi przez model Prandtla

Równanie Prandtla $\ell = \kappa y$, opisujące drogę mieszania było wielokrotnie modyfikowane (por. Launder i Spalding [1972]). Wśród tych modyfikacji najbardziej znana jest modyfikacja van Driesta:

$$\ell = \kappa y [1 - \exp(-y^+/A)] \quad , \quad (7.19)$$

gdzie $A = 26$, $y^+ = \frac{y u_0}{\nu}$, $u_0 = \sqrt{\tau_0/\rho}$, τ_0 – jest stycznym naprężeniem przy ścianie.

Współczynnik lepkości turbulentnej (7.16) modyfikowany był m.in. przez Cebeciego i Smitha oraz Baldwina i Lomaxa (por. Chung [2002]).

Kołmogorow (w 1942r.) i Prandtl (w 1945r.) zaproponowali też modele turbulencji z jednym równaniem domykającym (por. Launder i Spalding [1972]) gdzie lepkość turbulentna uzależniona została od energii kinetycznej turbulencji:

$$v_T = c_\mu \ell \sqrt{k}, \quad k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}, \quad c_\mu = 0,09. \quad (7.20)$$

Energia kinetyczna turbulencji k , występująca w tym równaniu, wymaga dodatkowego równania wiążącego ją z innymi wielkościami występującymi w równaniu Reynoldsa (7.12). Tym równaniem jest równanie transportu energii kinetycznej turbulencji:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i k_{,i} = (v_k k_{,i})_{,i} + (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_i)_{,j}, \quad v_k = \nu + \nu_T. \quad (7.21)$$

Zastosowanie modeli Prandtla jest ograniczone w zasadzie do opisu przepływów w warstwie przyściennej i przepływów dwuwymiarowych w pobliżu ściany.

Inny, bardziej skomplikowany model z jednym równaniem dodatkowym zaproponowali Spalart i Allmaras [1992], gdzie współczynnik lepkości turbulentnej obliczany jest przez rozwiązanie dodatkowego równania różniczkowego.

7.3.3 Model $k-\varepsilon$

Model $k-\varepsilon$ jest jednym z wielu modeli o dwóch dodatkowych równaniach, zaproponowany został przez Chou [1945] i następnie modyfikowany był wielokrotnie m.in. przez Davidova, Harlowa i Nakayamę, Jonesa i Laudnera (por. Laudner i Spalding [1972]). Jest jednym z najpopularniejszych modeli i z pewnością najczęściej obecnie stosowanym modelem turbulencji przepływu płynu nieściśliwego, o niewielkich prędkościach. Przedstawimy tu jego klasyczną wersję, opisaną przez Laudnera i Spaldinga oraz Chunga [2002].

Tensor naprężeń turbulentnych Reynoldsa (7.14) opisany jest dodatkowym równaniem:

$$\tau_{ij}^* = \mu_T (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}, \quad \mu_T = \rho c_\mu k^2 / \varepsilon, \quad (7.22)$$

gdzie k oznacza energię kinetyczną turbulencji a c_μ jest stałą (por. 7.20), ε oznacza dysypację energii kinetycznej turbulencji. Dwie nowe wielkości ($k-\varepsilon$) wprowadzone w równaniu (7.22) wymagają dodatkowych dwóch równań transportu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + (\bar{\rho} k \bar{u}_i)_{,i} = (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)_{,i} - \bar{\rho} \varepsilon + (\mu_k k_{,i})_{,i}, \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \varepsilon) + (\bar{\rho} \varepsilon \bar{u}_i)_{,i} = c_{\varepsilon 1} (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)_{,i} - c_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon^2 / k + (\mu_\varepsilon \varepsilon_{,i})_{,i}, \quad (7.24)$$

gdzie $\mu_k = \mu + \mu_T / \sigma_k$, $\mu_\varepsilon = \mu + \mu_T / \sigma_\varepsilon$ a stałe modelu przyjmują następujące wartości: $c_\mu = 0,09$; $c_{\varepsilon 1} = 1,45 \div 1,55$; $c_{\varepsilon 2} = 1,92 \div 2,00$; $\sigma_k = 1,00$; $\sigma_\varepsilon = 1,30$.

Model $k-\varepsilon$ doczekał się wielu modyfikacji poprawiających jego zgodność z danymi eksperymentalnymi. Launder, Reece i Rodi [1975] zaproponowali model DSM (Differential Second Moment) a Rodi [1976] jego wersję uproszczoną – ASM (Algebraic Stress Model). Oba modele rozwinięte zostały w latach 90-tych przez Murakami i in. (por. Murakami

[1990],[1993],[1996],[1997], Murakami i Mochida [1988],[1991],[1995]) oraz Laundera i Kato [1993].

Układ dodatkowych równań modelu DSM w wersji podanej przez Murakamiego przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{u'_i u'_j}) + (\overline{u'_i u'_j} \bar{u}_j)_{,j} &= P_{ij} + D_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} , \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\varepsilon \bar{u}_j)_{,j} &= D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon), \end{aligned} \quad (7.25)$$

a dla modelu ASM mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + (k \bar{u}_j)_{,j} &= D_k + P_k - \varepsilon , \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\varepsilon \bar{u}_j)_{,j} &= D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon), \\ (P_k - \varepsilon) \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} &= P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} , \end{aligned} \quad (7.26)$$

Dodatkowe funkcje obu modeli określone są następująco:

$$\begin{aligned} D_{ij} &= [C_k \overline{u'_m u'_l} (\overline{u'_i u'_j})_{,l} k / \varepsilon]_{,m} , \\ D_k &= (C_k \overline{u'_m u'_l} k k_{,l} / \varepsilon)_{,m} , \\ D_\varepsilon &= (C_\varepsilon \overline{u'_m u'_l} k \varepsilon_{,l} / \varepsilon)_{,m} , \\ P_k &= -\overline{u'_i u'_j} \bar{u}_{i,j} , \\ P_{ij} &= -\overline{u'_i u'_k} \bar{u}_{j,k} - \overline{u'_j u'_k} \bar{u}_{i,k} , \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon , \\ \Phi_{ij} &= -C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) - C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k), \end{aligned} \quad (7.27)$$

gdzie stałe modelu podane przez Murakamiego są równe:

$$C_1 = 1,8 ; C_2 = 0,6 ; C_k = 0,22 ; C_\varepsilon = 0,16 ; C_{\varepsilon 1} = 1,44 ; C_{\varepsilon 2} = 1,92 .$$

7.3.4 Model k - ω

Autorem modelu k - ω był Kołmogorow [1942], który zaproponował związek między wirowością a energią kinetyczną turbulencji:

$$\omega = c k^2 / \ell , \quad (7.28)$$

gdzie c jest stałą. Dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej zapisać można wtedy następująco:

$$\mu_T = \rho k / \omega . \quad (7.29)$$

Równania transportu energii kinetycznej oraz wirowości są następujące:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} k) + (\bar{\rho} k \bar{u}_i)_{,i} = (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)_{,i} + (\mu_k k_{,i})_{,i} - \beta^* \bar{\rho} k \omega , \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \omega) + (\bar{\rho} \omega \bar{u}_i)_{,i} = \alpha \frac{\omega}{k} (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)_{,i} + (\mu_\varepsilon \omega_{,i})_{,i} - \beta \bar{\rho} \omega^2 , \quad (7.31)$$

gdzie stałe modelu przyjmują następujące wartości: $\alpha = 5/9$; $\beta = 3/40$; $\beta^* = 9/100$; $\sigma = \sigma^* = 1/2$.

7.4 Metody symulacji dużych wirów – LES

W roku 1963 Smagorinsky [1963] zaproponował symulację dużych wirów (Large Eddy Simulation - LES). Jest to prosty model polegający na przestrzennym uśrednieniu pola przepływu, w odróżnieniu od uśredniania względem czasu w modelach $k - \varepsilon$. Model Smagorinsky'ego zaczął być szeroko stosowany w komputerowych symulacjach przepływów turbulentnych począwszy od lat 70-tych. Dużą rolę w popularyzacji modelu LES odegrała praca Deardorffa [1970]. Standardowy model LES opisany jest równaniami:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + (\bar{u}_i \bar{u}_j)_{,j} = -\bar{p}_{,i} - (v + v_{SGS})_{,j} (\bar{u}_{i,j} + v \bar{u}_{j,i}) , \quad (7.32)$$

$$\bar{u}_{i,i} = 0 , \quad v_{SGS} = C_s \bar{\Delta} \sqrt{\bar{u}_{i,j} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})} , \quad \bar{\Delta} = (h_1 h_2 h_3)^{1/3} , \quad (7.33)$$

gdzie stała $C_s = 0,1 \div 0,25$ oraz h_1, h_2, h_3 oznaczają wymiary siatki dyskretyzującej obszar. W metodzie tej symulowane są wiry o skali porównywalnej z rozmiarami oczka siatki. Uwzględnienie wirów mniejszych odbywa się przez wprowadzenie dodatkowej lepkości wynikającej z naprężeń w wirach mniejszej skali (Subgrid Scale Stress - SGS) niż przyjęta siatka dyskretyzacyjna (skala uśrednienia przestrzennego).

Stała modelu C_s , przyjmowana jest w modelu standardowym jako niezależna od czasu i przestrzeni i jest optymalizowana w zależności od rodzaju analizowanego przepływu. W przypadku przepływów przez przewody przyjmuje się zwykłą wartość $C_s = 0.1$ a dla przepływów izotropowo zanikających (isotropic decay flow) $C_s = 0.23$. W latach 80 i 90 proponowano szereg metod optymalizujących stałą C_s . Duże znaczenie miały prace Germano [1998], który zaproponował tzw. Dynamiczny model LES (DS). W modelu DS używa się zmiennego w czasie i w przestrzeni współczynnika C_s , który oblicza się porównując wyniki symulacji przy dwóch różnych skalach filtracji przestrzennej pola przepływu. Dokładniejsze wyniki metody DS pociągają za sobą znaczne wydłużenie czasu obliczeń, który wzrasta pięciokrotnie w stosunku do standardowego modelu LES (por. Murakami [1997]). Inne propozycje optymalizacji stałej C_s wynikające z różnych metod uśredniania stosowanych w obliczeniach omówione są w pracy Germano [1998].

7.5 Metody bezpośredniego całkowania numerycznego

Metody poszukiwania rozwiązania zagadnienia przepływu turbulentnego polegające na bezpośrednim rozwiązaniu numerycznym równania Naviera-Stokesa są dosyć proste, jeżeli porównać je z metodami koniecznymi do rozwiązania równań modeli opisanych w poprzednich punktach tego rozdziału. Jeżeli ograniczymy się do niewielkich ($Re < 10^3$) liczb Reynoldsa, z powodów które opisane zostały we wstępie do tego rozdziału i ograniczymy krok czasowy rozwiązania: $\Delta t < 0,0005 \cdot \sqrt{H/\nu}$, gdzie H jest przestrzenną skalą przepływu (np. wysokością tunelu), to otrzymane wyniki są dostatecznie zgodne z eksperymentem (por. Ohya i in. [1992]).

Metody numeryczne stosowane w rozwiązaniu zagadnień przepływów opisane zostały w rozdziale 8. Z wielu metod tam opisanych najczęściej stosowana obecnie jest metoda objętości skończonych a zagadnienia nieustalone rozwiązuje się zwykle korzystając ze schematu całkowania Cranka-Nicolsona, Adamsa-Bashfordta lub Rungego-Kutty.

Problemem, który pojawia się podczas rozwiązywania równania Naviera-Stokesa dla płynów nieściśliwych jest brak zbieżności rozwiązania. Pojawiają się oscylacyjne wartości w kolejnych iteracjach co uniemożliwia uzyskanie żądanej dokładności. Kilka metod stosowanych jest w celu rozwiązania tego problemu, z których trzy są najczęściej stosowane:

- metoda sztucznej ściśliwości płynu,
- metoda korekcji ciśnienia,
- metoda wirowa.

Metody te omówimy w dalszych punktach tego rozdziału.

Będziemy zajmować się równaniem Naviera-Stokesa (7.1) dla płynu jednorodnego ($\nu = \text{const}$) i nieściśliwego ($\rho = \text{const}$), zapisanym w postaci bezwymiarowej:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} u_j = -p_{,i} + \frac{1}{\text{Re}} u_{i,jj}, \quad (7.34)$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$u_i = \frac{u_i^*}{u_0}, \quad x_i = \frac{x_i^*}{L_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho u_0^2}, \quad t = \frac{t^* u_0}{L_0}, \quad \text{Re} = \frac{u_0 L_0}{\nu}. \quad (7.35)$$

Gwiazdkami oznaczone są tu wielkości fizyczne, u_0 , L_0 oznaczają porównawcze wartości prędkości i odległości, stała Re nosi nazwę liczby Reynoldsa. Równanie ciągłości (7.2) wyraża teraz brak zmiany objętości cząstki płynu:

$$u_{i,i} = 0. \quad (7.36)$$

Warunki brzegowe, które powinno spełniać rozwiązanie równań N-S można podzielić na pięć grup:

- warunki na powierzchni napływu (*inlet condition*),
- warunki na powierzchni odpływu (*outlet condition*),
- warunki na powierzchni ścian,
- warunki na płaszczyźnie symetrii.
- na powierzchni napływu lub odpływu zadane jest pole ciśnienia

Omówimy oddzielnie każdą z tych grup.

Warunki na powierzchni napływu

Powierzchnia napływu stanowi powierzchnię ograniczającą obszar dyskretyzacji. Powinna być tak dobrana, aby znane były wartości składowych wektora prędkości na tej powierzchni oraz gradient składowej w kierunku normalnej:

$$u_i(x, y, z)|_{S_i} = u_{i1}(\xi, \zeta), \quad \frac{\partial u_i}{\partial \eta}|_{S_i} = \phi_{i1}(\xi, \zeta), \quad (7.37)$$

gdzie ξ, ζ są współrzędnymi na powierzchni napływu S_i , η jest współrzędną normalną do powierzchni S_i , $u_{i1}(\xi, \zeta)$ i $\phi_{i1}(\xi, \zeta)$ są znanymi funkcjami na powierzchni napływu. Ze względu na wygodę takiego założenia, najczęściej przyjmuje się: $\frac{\partial u_i}{\partial \eta}|_{S_i} = 0$, dla przepływów

ustalonych lub $\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i1} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \right]_{S_i} = 0$, dla przepływów nieustalonych. Powierzchnia być założona dostatecznie daleko aby można było zaniedbać zaburzenia wywołane niezbyt dokładnym przyjęciem warunku napływu.

Warunki na powierzchni odpływu

Na powierzchni odpływu na ogół nie znamy dostatecznie dokładnie ani pola prędkości ani gradientów jego składowych. Należy zatem przyjąć tą powierzchnię także dostatecznie daleko aby warunki brzegowe nie zburzyły rozwiązania. Przyjmuje się tu najczęściej warunki brzegowe zbliżone do warunków na powierzchni napływu w przepływie ustalonym:

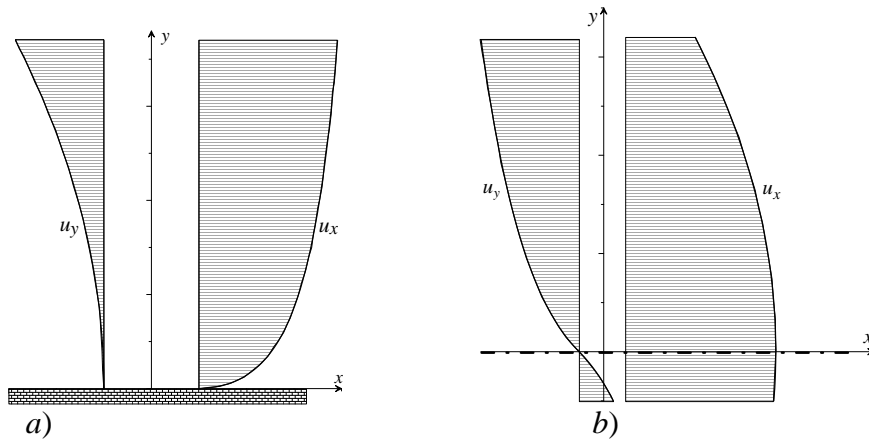
$$u_i(x, y, z)|_{S_o} = u_{i0}(\xi, \zeta), \quad \frac{\partial u_i}{\partial \eta}|_{S_o} = 0. \quad (7.38)$$

Warunki na powierzchni ściany

Przy powierzchni ściany pole przepływu płynu spełnia następujące warunki (por. Ferziger, Perić [2002]):

$$u_x|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x}|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad \Rightarrow \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad (7.39)$$

gdzie x jest współrzędną styczną a y – prostopadłą do powierzchni ściany (rys. 7.3), u_x, u_y są odpowiednimi składowymi wektora prędkości. W modelach turbulencji (np. k - ε) składowe tensora naprężeń występują bezpośrednio w równaniach transportu (por. równ. 7.15, 7.21, 7.22), warunek $\tau_{yy} = 0$ może być więc użyty bezpośrednio. Warunki tego typu nazywane są w literaturze angielskojęzycznej warunkami *no-slip*.



Rys. 7.3. Składowe wektora prędkości w pobliżu ściany (a) i w płaszczyźnie symetrii (b)

Warunki na płaszczyźnie symetrii

Jeżeli przepływ charakteryzuje się symetrią względem płaszczyzny $y = 0$, to warunki brzegowe na tej płaszczyźnie są następujące (rys. 7.3):

$$u_y|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}|_{y=0} \neq 0. \quad (7.40)$$

Zadane pole ciśnienia

Jeżeli na powierzchni zadane zostanie pole ciśnienia to należy z niego wyznaczyć odpowiednie składowe wektora prędkości tak aby doprowadzić problem do zadanego pola prędkości.

Dobór odpowiednich warunków początkowych dla problemów przepływu nieustalonego, gdzie w przypadku turbulencji mogą występować periodyczne warunki w pewnych obszarach nie jest prostym zadaniem. W książce Ferziger i Perića można znaleźć pogląd, że dobór odpowiednich warunków brzegowo-początkowych dla równań N-S w przypadku przepływu nieustalonego to nadal sprawa sztuki a nie nauki i wymaga, w przypadku skomplikowanych zadań, dużego doświadczenia.

7.5.1 Metoda sztucznej ściśliwości

Autorem metody sztucznej ściśliwości – ACM (Artificial Compressibility Method) jest Chorin [1967], który zaproponował aby równanie wyrażające nieściśliwość płynu (7.36), zmodyfikować do postaci przypominającej równanie ciągłości (7.2):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + u_{i,i} = 0, \quad (7.41)$$

gdzie $\tilde{\rho} = p/\beta$ jest sztuczną gęstością płynu uzależnioną teraz od ciśnienia, \tilde{t} oznacza sztuczny czas, β jest parametrem sztucznej ściśliwości, przyjmowanym z przedziału: $0,1 \leq \beta \leq 10$ (por. Chung [2002]).

Problem ruchu płynu opisuje teraz układ czterech równań (7.34) i (7.41). W każdym punkcie przestrzeni, w chwili t musimy określić cztery niewiadome: u_1 , u_2 , u_3 oraz ciśnienie p . Problem całkowania tych równań rozwiązuje się zwykle metodą Cranka-Nicolsona (por. rozdział 8, p. 8.1.5) lub metody wielopunktowe (por. p. 8.17). Zadanie jest

numerycznie dobrze uwarunkowane, tzn. układ równań liniowych otrzymanych w wyniku przestrzennej dyskretyzacji daje rozwiązanie obciążone małym błędem a metody iteracyjne zastosowane do rozwiązania tego układu równań liniowych dają wynik szybko zbieżny do rozwiązania dokładnego.

7.5.1.1 Przykład rozwiązania zadania przepływu metodą ACM

Oznaczmy, w celu uniknięcia dwuznaczności, składowe wektora prędkości tradycyjnymi symbolami: $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$. Indeksy dolne oznaczają teraz będą numer węzła siatki dyskretyzacyjnej (por. rozdz. 8, p. 8.2). Zbierzemy też wszystkie niewiadome określone w punkcie „ i ” siatki w macierz kolumnową:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} p_i \\ u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i^T = [p_i \quad u_i \quad v_i \quad w_i], \quad \mathbf{u}_i = [p_i \quad u_i \quad v_i \quad w_i]^T, \quad (7.42)$$

gdzie indeks górny T oznacza transpozycję macierzy. Układ równań (7.34) i (7.41) przyjmie teraz postać macierzową:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z = \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{u}_\nabla, \quad (7.43)$$

gdzie:

$$\mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} \beta u_x \\ p_x + 2uu_x \\ vu_x + uv_x \\ wu_x + uw_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_y = \begin{bmatrix} \beta v_y \\ uv_y + vu_y \\ p_y + 2vv_y \\ wv_y + vw_y \end{bmatrix}, \quad (7.44)$$

$$\mathbf{u}_z = \begin{bmatrix} \beta w_z \\ uw_z + wu_z \\ vw_x + wv_z \\ p_z + 2ww_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_\nabla = \nabla^2 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

W równaniach tych pominięto indeksy dolne oznaczające numer węzła siatki oraz przecinkiem oznaczono różniczkowania względem współrzędnych x , y , z .

Aby pokazać rozwiązanie tego układu równań metodą objętości skończonych (por. rozdz. 8) ograniczymy się do zadania w obszarze płaskim co zmniejszy nieco rozmiary zadania. Układ równań (7.43) przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta(u_x + v_y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu_x + vu_y + p_x = \frac{1}{\text{Re}}(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + uv_x + vv_y + p_y = \frac{1}{\text{Re}}(v_{xx} + v_{yy}).$$
(7.45)

Zamieniając pochodne względem czasu na przyrosty skończone i całkując każde z tych równań w obszarze kontrolnym Ω (por. p. 8.2.1) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta p \, d\Omega &= -\Delta_t \left[\beta \int_{\Omega} (u_{,x} + v_{,y}) \, d\Omega \right], \\ \int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega &= \Delta_t \left[\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma} (u_{,x} n_x + u_{,y} n_y) \, d\Gamma - \int_{\Omega} (u u_{,x} + v u_{,y} + p_{,x}) \, d\Omega \right], \\ \int_{\Omega} \Delta v \, d\Omega &= \Delta_t \left[\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma} (v_{,x} n_x + v_{,y} n_y) \, d\Gamma - \int_{\Omega} (u v_{,x} + v v_{,y} + p_{,y}) \, d\Omega \right], \end{aligned} \quad (7.46)$$

gdzie Γ oznacza brzeg obszaru Ω , a n_x i n_y są składowymi wektora normalnego do tego brzegu. Wyrazy zawierające całki po obwodzie obszaru kontrolnego otrzymane zostały dzięki zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego (por. równ. 8.49 w rozdz. 8). Przyrosty czasowe Δp , Δu , Δv wyrazić można następująco:

$$\Delta p = p^{n+1} - p^n, \quad \Delta u = u^{n+1} - u^n, \quad \Delta v = v^{n+1} - v^n, \quad (7.47)$$

gdzie indeks górny oznacza numer kroku czasowego.

Oznaczając wyrażenia w nawiasach kwadratowych po prawych stronach równań (7.46), obliczone w chwili $t^n = n \Delta_t$, odpowiednio przez R_p^n , R_u^n , R_v^n zapiszemy schemat całkowania równań N-S ze sztuczną ściślnością następująco:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p^{n+1} \, d\Omega &= \int_{\Omega} p^n \, d\Omega - \Delta_t R_p^n, \\ \int_{\Omega} u^{n+1} \, d\Omega &= \int_{\Omega} u^n \, d\Omega + \Delta_t R_u^n, \\ \int_{\Omega} v^{n+1} \, d\Omega &= \int_{\Omega} v^n \, d\Omega + \Delta_t R_v^n, \end{aligned} \quad (7.48)$$

co odpowiada schematowi FT (Forward Time – por. równ. 8.36 w rozdz. 8). Ponieważ ten schemat całkowania wymaga bardzo małych kroków czasowych, bardzo łatwo można go usprawnić dzieląc całkowanie na dwa etapy (co odpowiada metodzie Rungero-Kutty 2-go rzędu – por. równ. 8.45):

- *etap 1*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} p^{n+\frac{1}{2}} d\Omega &= \int_{\Omega} p^n d\Omega - \frac{1}{2} \Delta_t R_p^n, \\
\int_{\Omega} u^{n+\frac{1}{2}} d\Omega &= \int_{\Omega} u^n d\Omega + \frac{1}{2} \Delta_t R_u^n, \\
\int_{\Omega} v^{n+\frac{1}{2}} d\Omega &= \int_{\Omega} v^n d\Omega + \frac{1}{2} \Delta_t R_v^n,
\end{aligned} \tag{7.49}$$

▪ *etap 2*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} p^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} p^n d\Omega - \Delta_t R_p^{n+\frac{1}{2}}, \\
\int_{\Omega} u^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} u^n d\Omega + \Delta_t R_u^{n+\frac{1}{2}}, \\
\int_{\Omega} v^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} v^n d\Omega + \Delta_t R_v^{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{7.50}$$

W równaniach tych, górny indeks $n+\frac{1}{2}$ oznacza wielkości obliczone w chwili $t^{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta_t$. Obliczymy teraz całki w obszarach Ω i po obwodach Γ występujące w równaniach (7.46). Stosując liniowe aproksymacje funkcji $u(x,y)$, $v(x,y)$, $p(x,y)$ w dowolnej chwili t^n oraz trójkątną siatkę dyskretyzacyjną (por. p. 8.2.3.1), otrzymamy całkę po części obszaru kontrolnego Ω_j , przylegającego do węzła „j” trójkąta:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_j} p d\Omega &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_j} p_i N_i(x,y) d\Omega = \frac{A}{108} \sum_{i=1}^3 (7p_i + 15\delta_{ij} p_j), \\
\int_{\Omega_j} p_{,x} d\Omega &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_j} p_i a_{xi} d\Omega = \frac{A}{3} \sum_{i=1}^3 p_i a_{xi}, \\
\int_{\Omega_j} uu_{,x} d\Omega &= \int_{\Omega_j} \sum_{i=1}^3 u_i a_{xi} \sum_{i=1}^3 u_i N_i(x,y) d\Omega = \\
&= \frac{A}{108} \sum_{i=1}^3 u_i a_{xi} \sum_{i=1}^3 (7u_i + 15\delta_{ij} p u_j).
\end{aligned} \tag{7.51}$$

gdzie a_{xi} są współczynnikami liniowych funkcji aproksymujących $N_i(x,y)$ w obszarze trójkąta (por. równ. 8.87). Pozostałe całki obliczyć można w analogiczny sposób a całki członu konwekcyjnego: $\int_{\Gamma} (u_{,x} n_x + u_{,y} n_y) d\Gamma$ są identyczne jak obliczone w rozdz. 8 (p. 8.2.3.1) przy rozwiązywaniu równania Poissona.

7.5.2 Metoda korekcji ciśnienia - SIMPLE

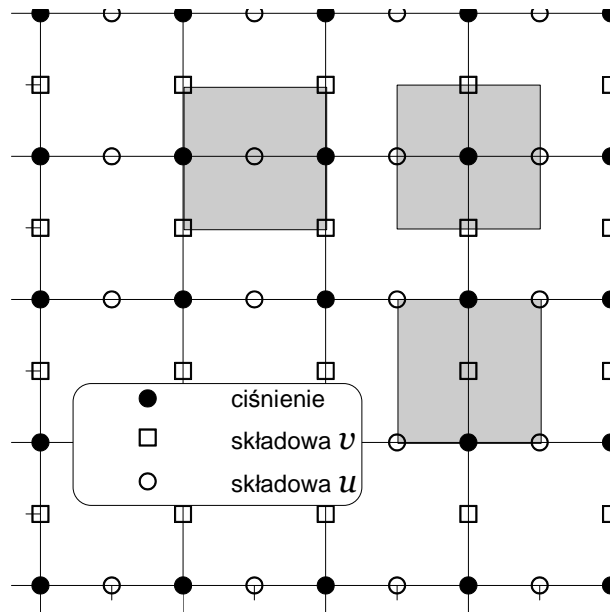
Metoda korekcji ciśnienia znana jest pod nazwą SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), jej autorami są Patankar i Spalding [1972] (por. Chung [2002], Ferziger i Perić [2002]). Problemy polegające na powstawaniu oscylacyjnych rozwiązań w

czasie iteracyjnego procesu rozwiązywania równań otrzymanych metodą różnic lub objętości skończonych, są omijane przez poszukiwanie rozwiązania w węzłach różnych siatek (rys. 7.4). Ciśnienie korygowane jest przez przyjęcie założenia, że aktualna wartość ciśnienia p składa się z wartości przewidywanej (obliczonej) \bar{p} i wartości skorygowanej p'

$$p = \bar{p} + p', \text{ lub } p = \bar{p} + \alpha p', \quad (7.52)$$

gdzie α jest parametrem relaksacyjnym, przyjmowanym na ogół jako $\alpha \approx 0,8$. Korekcję ciśnienia przeprowadza się rozwiązując równanie Poissona:

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta_t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \quad (7.53)$$



Rys. 7.4 Punkty węzłowe, w których określone są ciśnienie i składowe wektora prędkości, szarym kolorem zaznaczono obszary kontrolne wokół węzłów.

Modyfikacja metody korekcji ciśnienia znana jako SIMPLER (SIMPLE revised) zaproponowana przez Rainthby i Schneidera (por. Chung [2002]) daje inne równanie potrzebne do skorygowania ciśnienia:

$$\nabla^2 p = 2\rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (7.54)$$

które określa całkowite ciśnienie, a nie jego część korygującą. Przejście pomiędzy węzłami różnych siatek dyskretizacyjnych wykonuje się przez interpolację liniową.

7.5.3 Metoda wirowa

Metoda wirowa rozwiązywania równań Naviera-Stokesa dla płynu nieściśliwego polega na dekompozycji równania (7.34) do postaci zawierającej składowe wektora wirowości

zamiast wektora prędkości. To podejście jest szczególnie efektywne w przypadku przepływów płaskich, gdzie wektor wirowości ma tylko jedną niezerową składową. Wektor wirowości zdefiniowany jest następująco:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{u}, \\ \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega,\end{aligned}\tag{7.55}$$

Równanie Naviera-Stokesa przyjmuje po uwzględnieniu (7.55) postać następującą:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega_{,j} u_j = \frac{1}{\text{Re}} \omega_{,jj}.\tag{7.56}$$

Równanie ciągłości (7.36) będzie automatycznie spełnione gdy przyjmiemy, że składowe wektora prędkości są pochodnymi funkcji strumienia:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \mathbf{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.\tag{7.57}$$

Po podstawieniu do (7.55) otrzymujemy równanie Poissona, z którego można wyznaczyć funkcję strumienia:

$$\nabla^2 \psi = -\omega,\tag{7.58}$$

a stąd ciśnienie:

$$\nabla^2 p = 2\rho \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].\tag{7.59}$$

Równania (7.56)..(7.59) dają łatwy do całkowania metodami numerycznymi układ równań z którego można wyznaczyć wszystkie składowe wektora prędkości i wartość ciśnienia. W przypadku gdy rozwiązujemy problem ustalony, ciśnienie może być obliczone dopiero na końcu, co znacznie przyspiesza proces rozwiązania. Układ równań (7.56).. (7.59) jest też punktem wyjścia do rozwiązania zagadnienia przepływu turbulentnego metodą wirów dyskretnych (DVM), która będzie omówiona w następnym punkcie.

7.6 Metody bezsiatkowe – DVM

Alternatywą dla dotychczas stosowanych metod wymagających stosowania siatki dyskretyzującej obszar rozwiązania, jest DVM (Discrete Vortex Method) – metoda wirów dyskretnych. Jest to metoda bezsiatkowa, bazująca na lagranżowskim modelu śledzenia cząstek. Wśród omówionych metod, ta najbardziej zasługuje na nazwę DNS – bezpośrednia symulacja cyfrowa, gdyż rozwiązuje równania N-S w postaci wirowej metodami bezpośredniej symulacji zjawisk fizycznych a nie przez zastosowanie numerycznych metod siatkowych jak to czyniły metody poprzednie.

W ciągu ostatnich dwóch dekad metody lagranżowskie (śledzenie ruchu cząstek) rozwijane były głównie w zagadnieniach mechaniki płynów (przepływy turbulენტne), fizyki plazmy, dynamiki cząstek, przenikanie cieczy w ośrodkach porowatych.

Twórcą DVM jest Alexandre Chorin [1973], który opisał sposób rozwiązania problemu burzliwego przepływu dwuwymiarowego. Rozwój metody w zastosowaniu do problemów trójwymiarowych wiąże się głównie z pracami Leonarda [1980] i jego grupy badaczy z Caltechu. Dla popularyzacji metod wirowych w Europie wielkie znaczenie miały prace G. Coeta i P. Koumoutsakosa [2000].

Ze względu na adaptacyjne własności tej metody nie są konieczne dodatkowe równania opisujące uproszczone modele turbulencji. Innymi zaletami tej metody jest jej stabilność numeryczna i brak ograniczeń związanych z geometrią zadania. Mniejsza też jest liczba niewiadomych (parametrów śledzonych cząstek lub wirów) w stosunku do metod RANS lub LES. Wadą metody jest czasochłonność algorytmu odtwarzającego ciągle pole prędkości na podstawie wirów dyskretnych. Złożoność obliczeniowa tego problemu (znanego pod nazwą problemu N -ciał) jest rzędu N^2 – w wersji klasycznej lub $N \log(N)$ – w wersji wielopolowej zaproponowanej przez Greengarda i Rokhlina [1987]. Najnowsze algorytmy wielopolowe umożliwiają wyznaczanie pola prędkości z kosztem proporcjonalnym do N .

W płynach lepkich, gdzie równanie Naviera-Stokesa zawiera człon dyfuzyjny, należy skorygować elementy wirowe tak aby uwzględniona została dyssypacja energii wirów wynikająca z lepkości płynu. Równanie dyfuzji rozwiązywane jest dla każdego elementu wirowego metodami probabilistycznymi (symulacja ruchów Browna) lub deterministycznymi. Twórcą tych metod symulacji dyfuzji jest również A. Chorin [1972], który zaproponował losowe zaburzenia kolejnych kroków (położeń) wirów. Symulacja ruchów Browna jest bardzo wygodna ze względu na swe własności samoadaptacji lecz dosyć czasochłonna, dlatego też często rozwiązuje się problem dyfuzji metodami deterministycznymi (por. Cottet, Koumoutsakos [2000]).

Rozwój zastosowań metod wirów dyskretnych w inżynierii wiatrowej datuje się od 1985r., kiedy Summers, Hanson i Wilson (Summers i in. [1985]) opublikowali pracę dotyczącą symulacji przepływu wiatru ponad budynkiem z zastosowaniem metody Chorina. W latach 90-tych nastąpił wyraźny wzrost zastosowań metod wirowych w problemach inżynierii wiatrowej. Można wymienić prace G. Turkiyyaha i in. [1995], [1997] w USA, A. Larsena i J. H. Waltera [1996] w Danii, Taylora i Vezza oraz G. Morgenthala [2002] w Wielkiej Brytanii.

7.6.1 Podstawowe równania

Podstawowymi równaniami metody wirów dyskretnych są równanie Naviera-Stokesa w postaci wirowej (7.56) oraz równanie funkcji strumienia (7.58). Rozwiązanie równania funkcji prądu może być wyrażone dzięki całce Biota-Savarta w postaci:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\int \omega(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0, \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, \quad (7.60)$$

gdzie $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ jest funkcją Greena – rozwiązaniem równania (7.58) przy obecności punktowego wiru o jednostkowej cyrkulacji : $\omega(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$, \mathbf{r} wektorem wskazującym położenie wiru, $\delta(\mathbf{r})$ deltą Diraca. Pole wirów $\omega(\mathbf{r})$ modelowane jest jako suma pojedynczych wirów:

$$\omega(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (7.61)$$

gdzie $\omega_i(\mathbf{r})$ jest polem wiru w i -tym punkcie, Γ_i - cyrkulacją tego wiru, N - liczbą wirów. Po scałkowaniu (7.60) i zsumowaniu wirów (7.61) otrzymamy:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \Gamma_i \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|. \quad (7.62)$$

Obliczając składowe wektora prędkości na podstawie równania (7.57) otrzymamy:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty - \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Gamma_i. \quad (7.63)$$

gdzie \mathbf{u}_∞ oznacza prędkość niezaburzonego przepływu, jądro \mathbf{K}_0 w przypadku przepływu płaskiego opisane jest równaniem:

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{0i}}{2\pi (r_{0i})^2} = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{0i}}{2\pi r_{0i}} = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{0i}}{2\pi} f(r_{0i}), \quad (7.64)$$

gdzie r_{0i} oznacza moduł wektora $\mathbf{r}_{0i} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$, $r_{0i} = |\mathbf{r}_{0i}|$, a \mathbf{e}_{0i} jest wektorem jednostkowym o kierunku i zwrocie wektora \mathbf{r}_{0i} , tzn. $\mathbf{r}_{0i} = r_{0i} \mathbf{e}_{0i}$

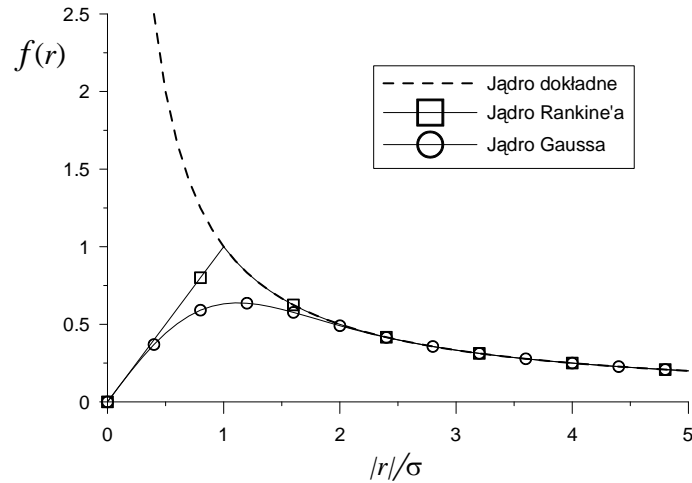
Ponieważ jądro \mathbf{K}_0 wykazuje osobliwość w punktach $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$, to zastępowane jest tzw. *jądrem zmiękczone* (*mollified kernel*) pozbawionym tej osobliwości. Najczęściej używanymi jądrami są jądra zaproponowane przez Rankine'a:

$$\mathbf{K}_\sigma(\mathbf{r}_{0i}) = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{0i}}{2\pi} f_\sigma(r_{0i}), \quad f_\sigma(r_{0i}) = \begin{cases} r_{0i}, & \text{gd } r_{0i} < \sigma \\ \frac{1}{r_{0i}}, & \text{gd } r_{0i} \geq \sigma \end{cases} \quad (7.65)$$

lub Gaussa:

$$\mathbf{K}_\sigma(\mathbf{r}_{0i}) = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{0i}}{2\pi} f_\sigma(r_{0i}), \quad f_\sigma(r_{0i}) = \frac{1}{r_{0i}} \left[1 - \exp(-r_{0i}^2 / \sigma^2) \right], \quad (7.66)$$

które różnią się postacią funkcji f_σ (rys.7.5). Inne, wyższego rzędu funkcje jądra rozważane były m. in. przez Chorina [1973]. W równaniach (7.65) i (7.66) σ oznacza umowną granicę wiru, która może być przyjęta na podstawie relacji: $\sigma = d^m$, gdzie $0 < m < 1$, a d jest „typową” odległością między wirami (por. Roberts [185]).



Rys. 7.5 Wykresy funkcji jądra

Rozwiązanie równania „transportu wirów” (7.56) rozłożone jest na dwie części: część napływową (adwekcyjną) i dyfuzyjną. Sposoby rozwiązania tych równań omówione zostaną w następnych punktach.

7.6.2 Rozwiązanie równania adwekcji

Część adwekcyjna pola $\omega(\mathbf{r})$ jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega_{,j} u_j = \frac{D\omega}{Dt} = 0, \quad (7.67)$$

które oznacza znikanie pochodnej materialnej pola wirowości $\omega(\mathbf{r})$. Równanie to rozwiązuje się zwykle metodą przyrostową (Eulera) w współrzędnych Lagrange’a dla pojedynczych wirów:

$$u_x(x_i, y_i) = \frac{dx_i}{dt}; \quad u_y(x_i, y_i) = \frac{dy_i}{dt}. \quad (7.68)$$

Biorąc tylko przyrosty pierwszego rzędu otrzymamy:

$$x_{adv}^{n+1} = x_i^n + u_x(x_i^n, y_i^n) \Delta t, \quad y_{adv}^{n+1} = y_i^n + u_y(x_i^n, y_i^n) \Delta t. \quad (7.69)$$

7.6.3 Rozwiązanie równania dyfuzji

Rozwiązaniem części dyfuzyjnej równania (7.56):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \omega_{,ij} \quad , \quad (7.70)$$

jest funkcja:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \sum_{i=1}^N \omega_{0i}(r_{0i}, t), \\ \omega_i(r_{0i}, t) &= \frac{\Gamma_i}{4\pi / \text{Re}} \exp\left(\frac{-r_{0i}^2}{4t / \text{Re}}\right), \end{aligned} \quad (7.71)$$

wyrażona we współrzędnych biegunowych dla przypadku gdy środek i -tego wiru znajduje się w początku układu współrzędnych.

Pole wirowe składające się z N wirów dyskretnych (7.71) po kroku czasowym Δ_t może być aproksymowane przez losowe pola wirów o rozkładzie Gaussa o zerowej wartości średniej i wariancji $2\Delta_t / \text{Re}$ (por. Chorin [1972], Turkiyyah i in. [1995]). Współrzędne biegunowe i -tego wiru (r_{0i}, ϑ_{0i}) mogą być przyjęte następująco:

$$r_{0i} = \sqrt{\frac{4t}{\text{Re}} \ln \left| \frac{1}{P_i} \right|}, \quad \vartheta_{0i} = 2\pi Q_i, \quad (7.72)$$

gdzie P_i oraz Q_i są liczbami losowymi z przedziału $(0 \div 1)$.

Współrzędne kartezjańskie wiru można zatem obliczyć ze wzoru:

$$x_i^{n+1} = x_{iadv}^n + r_{0i} \cos \vartheta_{0i}, \quad y_i^{n+1} = y_{iadv}^n + r_{0i} \sin \vartheta_{0i}. \quad (7.73)$$

Rozwiązanie takie, symulujące ruchy Browna cząstek, zaproponował Chorin [1973]. Zmierzano ono do rozwiązania dokładnego wraz ze wzrostem N , błąd jest proporcjonalny jest do $1/(\text{Re} \sqrt{N})$. Stosowane też są inne, deterministyczne rozwiązania np. zaproponowane przez Cotteta, Mass-Galic'a (por. Cottet, Koumoutsakos [2000]) polegające na zmianie siły (Particle Strength Exchange – PSE) - lub rozmiarów wirów.

7.6.4 Uwzględnienie warunków brzegowych

Warunki brzegowe w warstwie przyściennej opływanego ciała nieruchomego sformułować można następująco (Cottet, Koumoutsakos [2000]):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \psi = 0 \text{ na powierzchni } S, \quad (7.74)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ na powierzchni } S, \quad (7.75)$$

gdzie S jest powierzchnią bryły \mathbf{n} wektorem normalnym a \mathbf{s} wektorem stycznym do powierzchni. Gdy przyjąć, że kierunek osi y pokrywa się z kierunkiem normalnej a osi x z kierunkiem stycznej to warunki (7.71) i (7.72) stają się identyczne z opisanymi we wstępie p. 7.5 warunkami typu *no-slip* (7.39).

Następną wielkością, którą należy określić na brzegu obszaru jest produkcja wirów. Ten problem rozwiązywany był przez wielu autorów: Chorina [1978], Lighthilla [1963], Levisa [1991], Cotteta i Koumoutsakosa (por. Cottet, Koumoutsakos [2000]). Przedstawimy tu, historycznie pierwszy, algorytm uwalniania wirów na opływanej powierzchni zaproponowany przez Lighthilla i później udoskonalany przez Chorina.

Rozwiązanie w chwili t^n równania Poissona dla funkcji strumienia (7.58) z warunkami (7.71) na brzegu można przedstawić w postaci sumy:

$$\psi = \psi_\infty + \psi_\gamma + \psi_\omega, \quad (7.76)$$

gdzie ψ_∞ – jest rozwiązaniem jednorodnego równania Poissona, reprezentującym wpływ pola prędkości w dużych odległościach od analizowanej powierzchni, ψ_ω jest rozwiązaniem równania (7.58) przedstawionym w postaci (7.60):

$$\psi_\omega(\mathbf{r}, t) = \int \omega(\mathbf{r}', t) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (7.77)$$

reprezentującym wpływ wirowości $\omega(\mathbf{r})$ na pole prędkości $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, ψ_γ jest wpływem zaburzeń brzegowych na pole prędkości przedstawionym w postaci analogicznej do (7.77):

$$\psi_\gamma(\mathbf{r}, t) = \int \gamma(\mathbf{r}', t) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (7.78)$$

Jak widać (por. równ. 7.63) funkcje ψ_γ i ψ_ω , są tak dobrane, że pole $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ znika gdy $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Obliczenie wirowości warstwy przyściennej $\gamma(\mathbf{r})$, umożliwia równanie:

$$\gamma(\mathbf{r}) + 2 \int \frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}} \gamma(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -2 \left[\frac{\partial \psi_\infty}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \psi_\omega}{\partial \mathbf{n}} \right], \quad (7.79)$$

gdzie \mathbf{n} jest wektorem normalnym do brzegu. Zmiana wirowości wywołana kontaktem *no-slip* ze ścianą jest zatem równa $d\omega = -\gamma(s) ds$, gdzie ds oznacza długość odcinka ściany na którym tą zmianę obliczamy. Przekładając te wyniki na algorytm całkowania numerycznego równania (7.67), otrzymamy równanie opisujące cyrkulację wiru, który należy uwolnić w każdym kroku czasowym na odcinku ds_i :

$$\Gamma_i = \gamma(s_i) ds_i. \quad (7.80)$$

Aby spełnić warunki *no-slip*, należy wymusić styczną do brzegu prędkość tego wiru w kolejnym kroku czasowym.

7.6.5 Obliczenie ciśnienia

Ciśnienie $p(\mathbf{r})$ otrzymuje się rozwiązując równanie Poissona (por. p. **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania., Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**) w postaci:

$$\nabla^2 p = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad (7.81)$$

lub w postaci (7.59). Równanie to rozwiązuje się jednokrotnie po zakończeniu obliczeń jeżeli nie musimy wyznaczać ciśnienia w każdym kroku czasowym, lub wielokrotnie, po zakończeniu każdego kroku wyznaczania pola prędkości, dla przepływów gdzie pole ciśnienia ma wpływ na ruch opływanych brył.