

# **ROZDZIAŁ I . WPROWADZENIE DO METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH**

W rozdziale tym omówimy podstawowe koncepcje i algorytm metody elementów skończonych. Podamy też niezbędne informacje dotyczące mechaniki ciała stałego. Jak już pisaliśmy we wstępie zakładamy, że czytelnik zna podstawowe zagadnienia wytrzymałości materiałów i teorii sprężystości, podane tu informacje będą jedynie przypomnieniem i wprowadzeniem do stosowanego przez nas zapisu macierzowego. Czytelnikom, którzy chcą pogłębić wiadomości z tej dziedziny polecamy przestudiowanie odpowiednich pozycji literatury podanych na końcu książki, w szczególności polecamy książki S.Timoshenki i D.N.Goodiera [17], Y.C.Funga [3] oraz P.Jastrzębskiego i in. [8].

## **1. GENEZA I POSTAWOWA KONCEPCJA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH**

Początków metody elementów skończonych doszukiwać się można w latach 20 i 30 XX wieku, kiedy w USA G.B.Maney i H.Cross oraz A.Ostenfeld w Holandii, korzystając z prac J. C. Maxwella, A. Castiliano i O. Mohra, zaproponowali metodę rozwiązywania zagadnień mechaniki konstrukcji znaną dzisiaj jako metoda przemieszczeń.

Uogólnienia tej metody na zagadnienia mechaniki kontinuum dokonali w połowie XX wieku J.Argyris, P.C.Pattan, S.Kelsey, M.Turner, R.Clough i inni. W latach 60 i 70 metoda elementów skończonych przeszła szereg modyfikacji m.in. dzięki pracom O.C.Zienkiewicza, Y.K.Cheunga, R.L.Taylor, które uczyniły z niej współczesne narzędzie służące do rozwiązywania zagadnień mechaniki ciała stałego, przepływów ciepła, mechaniki płynów, pól elektromagnetycznych, itp.

Podstawową koncepcją metody elementów skończonych (MES) jest poszukiwanie rozwiązania złożonego problemu (opisanego zwykle równaniem różniczkowym) przez zastąpienie go prostszym, zbliżonym. Prowadzi to najczęściej do znalezienia rozwiązania przybliżonego, którego dokładność zależy od przyjętych metod aproksymacji. W zagadnieniach mechaniki rozwiązanie polega najczęściej na znalezieniu przemieszczeń, odkształceń i naprężeń kontinuum. Zagadnienia te występują w statyce i dynamice konstrukcji prętowych, powierzchniowych (tarcze, płyty, powłoki) i bryłowych. Równowaga ciała określona jest zwykle równaniem (lub układem równań) różniczkowym, które musi być

spełnione wewnątrz obszaru ciała, oraz warunkami brzegowymi, które spełnione być powinny na jego powierzchni. Znalezienie ścisłych rozwiązań takich zagadnień jest najczęściej bardzo trudne lub wręcz niemożliwe. Metoda elementów skończonych proponuje następujący sposób poszukiwania rozwiązania przybliżonego [19]:

- ♦ Obszar ciała zostaje podzielony na małe fragmenty zwane elementami skończonymi.
- ♦ Nieskończona liczba punktów kontaktu na brzegu elementów zostaje zredukowana do kontaktu tylko w wybranych punktach (węzłach) elementów. Przemieszczenia węzłów stanowią poszukiwane niewiadome zadania.
- ♦ Przemieszczenia punktów leżących wewnątrz elementu zostają uzależnione od przemieszczeń węzłów. Dokonuje się to przez dobranie odpowiednich funkcji aproksymujących zwanych funkcjami kształtu. Aproksymacja przemieszczeń pozwala obliczyć odkształcenia, naprężenia wewnątrz elementu oraz siły na jego brzegach.
- ♦ Wyznaczamy siły brzegowe elementów w punktach kontaktu - są to siły węzłowe, które uzależnione są od przemieszczeń węzłów. Związek między siłami i przemieszczeniami węzłowymi określa tzw. macierz sztywności elementu.
- ♦ Układ równań równowagi zostaje zapisany dla wszystkich węzłów co sprowadza zagadnienie do rozwiązania układu równań algebraicznych, często liniowych. Rozwiązanie takiego układu równań wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi pozwala obliczyć odkształcenia i naprężenia wewnątrz elementów.

Aproksymacja wymaga rozwiązania szeregu problemów, z których najważniejszymi wydają się być dobór funkcji kształtu oraz sposób dyskretyzacji obszaru. Dobór modelu konstrukcji (sprężysta, plastyczna, prętowa, płytowa itp.) oraz sposób dyskretyzacji wymaga sporego doświadczenia. W następnych rozdziałach książki przekażemy informacje ułatwiające pracę mniej doświadczonym użytkownikom systemów MES.

## **2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA I TWIERDZENIA MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO**

Podamy teraz kilka podstawowych założeń i twierdzeń mechaniki, z których będziemy korzystać w dalszych rozdziałach tej książki.

### **2.1. Założenia dotyczące liniowego modelu konstrukcji**

Zajmować będziemy się w tym i w dalszych rozdziałach liniowymi problemami mechaniki. Znaczący to, że zarówno geometrycznie jak fizycznie proces deformacji konstrukcji

da się opisać liniowymi równaniami różniczkowymi. Pociąga to za sobą następujące konsekwencje:

- ♦ Przesunięcia punktów konstrukcji powstałe w czasie deformacji są małe. Przesunięcia liniowe są dużo mniejsze od charakterystycznego wymiaru konstrukcji (np. ugięcie belki jest kilkaset razy mniejsze od jej długości) a kąty obrotu dużo mniejsze od jedności (np. kąt obrotu węzła mniejszy od 0.01 rad).
- ♦ Odkształcenia są również małe co pozwala wyrazić związek między odkształceniami i przemieszczeniami przy pomocy równań liniowych.
- ♦ Materiał jest liniowo-sprężysty tzn. współczynniki równań konstytutywnych, opisujących związki naprężenie-odkształcenie, są stałe.

Może wydawać się, że tak wielkie ograniczenia nałożone zarówno na geometrię konstrukcji jak i na charakterystykę materiału mocno ograniczą zakres stosowania modelu. W istocie warunki te spełnia bardzo wiele konstrukcji tworzonych przez inżynierów, więc obszar stosowalności modelu liniowego jest bardzo duży. Należy zdawać sobie jednak sprawę z tych barier, gdy przystępujemy do opisu rzeczywistego problemu równaniami mechaniki.

## 2.2. Naprężenia i odkształcenia

Składowe tensora naprężenia oznaczать będziemy tradycyjnie (jak w większości książek poświęconych metodzie elementów skończonych) tzn. składowe normalne oznaczone będą literami  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  a składowe styczne  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ . Ze względu na symetrię tensora naprężenia [17],[3] używać będziemy tylko tych sześciu składowych. Zebrane w macierz kolumnową tworzą one wektor naprężeń:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Również składowe tensora odkształcenia oznaczать będziemy tradycyjnie przyjmując definicje:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y},$$

gdzie:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , są składowymi normalnymi odkształcenia (wydłużeniami jednostkowymi) a  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  składowymi stycznymi (kątami odkształcenia postaciowego),  $u_x, u_y, u_z$  są składowymi wektora przemieszczenia w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Składowe odkształcenia również zapiszemy w postaci macierzy kolumnowej wektora odkształcenia:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Przyjęcie w definicji wektora odkształcenia składowych  $\gamma_{ij}$  (kątów odkształcenia postaciowego) zamiast zwykłych tensorowych definicji ułatwia obliczenia pracy sił wewnętrznych:

$$w = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (1.4)$$

gdzie  $V$  oznacza objętość ciała.

### 2.3. Równania konstytutywne

Związek między składowymi tensora naprężenia a składowymi tensora odkształcenia (lub jak w naszych oznaczeniach między wektorami  $\boldsymbol{\sigma}$  i  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ), jak już wspominaliśmy przy założeniach poczynionych na wstępie, wyraża się liniowym równaniem:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.6)$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest kwadratową macierzą o wymiarach 6x6

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

zawierającą dwie stałe materiałowe  $\lambda$  i  $\mu$  zwane stałymi Lamé'go.

Ponieważ znacznie częściej używa się innych stałych materiałowych, a mianowicie: modułu Younga -  $E$  oraz współczynnika Poissona -  $\nu$ , podamy zależności między nimi a stałymi Lamé'go:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.8)$$

Stała Lamé'go  $\mu$  oznaczana jest też literą  $G$  i nosi nazwę modułu Kirchoffa.

Macierz odwrotna stałych materiałowych  $\mathbf{D}^{-1}$  ma niezwykle prostą budowę, którą najlepiej pokazać przy użyciu stałych  $E, \nu$ :

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Warto zauważyć, że macierz  $\mathbf{D}$  jest symetryczna tzn. zachodzi zależność  $\mathbf{D}=\mathbf{D}^T$ , którą będziemy często wykorzystywać w przekształceniach.

#### 2.4. Płaski stan naprężenia

W zagadnieniach dotyczących cienkich tarcz wygodnym uproszczeniem jest założenie:

$$\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0, \quad (1.10)$$

które prowadzi to do tzw. płaskiego stanu naprężenia (P.S.N.). Wstawiając równania (1.10) do (1.5) po uwzględnieniu (1.7) otrzymamy:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \gamma_{zx} = 0, \quad \gamma_{zy} = 0. \quad (1.11)$$

Wektory naprężeń i odkształceń oraz macierze stałych sprężystych w płaskim stanie naprężenia redukują się zatem o połowę:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

## 2.5. Płaski stan odkształcenia

W zagadnieniach dotyczących deformacji masywnych budowli często występuje stan odkształcenia opisany równaniami:

$$\varepsilon_z = 0, \gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0, \quad (1.15)$$

które po podstawieniu do (1.6) przy uwzględnieniu (1.9) dają następujące relacje:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0 \quad (1.16)$$

Stan taki nazywamy płaskim stanem odkształcenia (P.S.O.).

Związek między zredukowanymi wektorami naprężeń i odkształceń (1.12) prowadzi po uwzględnieniu (1.15) i (1.16) do następujących macierzy stałych sprężystych:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{-\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

## 2.6. Równania równowagi

Warunkiem koniecznym, aby ciało pozostało nieruchome, jest spełnienie przez siły zewnętrzne, działające na to ciało sześciu równań równowagi:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \mathbf{0}, \quad (1.19)$$

które zapisać też można skalarnie:

$$\sum_{i=1}^n P_{Xi} = \mathbf{0}; \quad \sum_{i=1}^n P_{Yi} = \mathbf{0}; \quad \sum_{i=1}^n P_{Zi} = \mathbf{0};$$

$$\sum_{i=1}^n M_{Xi} = \mathbf{0}; \quad \sum_{i=1}^n M_{Yi} = \mathbf{0}; \quad \sum_{i=1}^n M_{Zi} = \mathbf{0},$$
(1.20)

gdzie:  $P_{Xi}$ ,  $P_{Yi}$ ,  $P_{Zi}$  są składowymi  $i$ -tej siły  $\mathbf{P}_i$  a  $M_{Xi}$ ,  $M_{Yi}$ ,  $M_{Zi}$  momentami tej siły względem osi układu współrzędnych,  $n$  jest ilością przyłożonych sił.

Gdy układ sił leży w płaszczyźnie (np.  $XY$ ) to równania równowagi (1.20) redukują się do trzech następujących równań:

$$\sum_{i=1}^n P_{Xi} = \mathbf{0}; \quad \sum_{i=1}^n P_{Yi} = \mathbf{0}; \quad \sum_{i=1}^n M_{Zi} = \mathbf{0}.$$
(1.21)

## 2.7. Zasada prac wirtualnych

Równania równowagi (1.19) określają warunki, które musi spełniać układ sił działających na bryłę sztywną. W przypadku ciała sprężystego, które deformuje się pod działaniem sił, musimy określić też warunki dla sił wewnętrznych. Można to zrobić stosując zasadę prac wirtualnych (przygotowanych), która mówi, że dla ciała znajdującego się w równowadze praca sił zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych równa jest wzrostowi energii potencjalnej sił wewnętrznych:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \bar{\mathbf{u}}_i = E_\sigma,$$
(1.22)

gdzie:  $\bar{\mathbf{u}}_i$  jest wektorem przemieszczenia wirtualnego w punkcie  $i$ , kropka oznacza iloczyn skalarny wektora siły  $\mathbf{P}_i$  oraz wektora przemieszczenia wirtualnego  $\bar{\mathbf{u}}_i$ ,  $E_\sigma$  - jest energią potencjalną sił wewnętrznych:

$$E_\sigma = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV = \int_V \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV.$$
(1.23)

W równaniu (1.23)  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  oznacza wektor odkształcenia powstałego podczas wirtualnego przemieszczenia  $\bar{\mathbf{u}}$ .

Przemieszczenie wirtualne powinno spełniać następujące warunki [10]:

- musi być nieskończenie małe,
- dowolne, niezależne od sił działających na bryłę,
- zgodne z więzami, a więc teoretycznie możliwe,
- niezależne od czasu.

Równanie (1.22) będzie (w różnych wariantach) wielokrotnie wykorzystywane w dalszych rozdziałach książki.

## 2.8. Twierdzenie Clapeyrona

Zamieniając w równaniach (1.22) i (1.23) przemieszczenia wirtualne na rzeczywiste otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u}_i = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (1.24)$$

Równanie to wyraża treść twierdzenia Clapeyrona, które głosi, że dla układu sprężystego, znajdującego się w równowadze, praca sił zewnętrznych równa jest energii potencjalnej sił wewnętrznych (energii sprężystej).

## 2.9. Twierdzenia E.Bettiego o wzajemności prac i J.C.Maxwella o wzajemności przemieszczeń

Podstawmy do równania (1.22), wyrażającego zasadę prac wirtualnych, związek konstytutywny (1.5):

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \bar{\mathbf{u}}_i = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \int_V (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon})^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV. \quad (1.25)$$

W otrzymanym równaniu wykorzystano symetrię macierzy sprężystości  $\mathbf{D}=\mathbf{D}^T$ .

Zastosujemy teraz zasadę pracy wirtualnej nieco inaczej, mianowicie przyłożymy obciążenie wirtualne czyli układ sił  $\bar{\mathbf{P}}_j$ , działających w tych samych węzłach co siły rzeczywiste, lecz różnych co do wartości i kierunku. Praca tych sił na rzeczywistych przemieszczeniach układu wyniesie:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{P}}_j \cdot \mathbf{u}_j = \int_V \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V (\mathbf{D}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (1.26)$$

Prawe strony równań (1.25) i (1.26) są identyczne co łatwo można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Otrzymamy zatem równość:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \bar{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{P}}_i \cdot \mathbf{u}_i, \quad (1.27)$$

która wyraża zasadę wzajemności prac sformułowaną przez E.Bettiego w 1972 r.

Zasadę tę zapisać można następująco [10]:

Układ sił  $\mathbf{P}_i$  wykonuje taką samą pracę na przemieszczeniach wywołanych układem sił  $\mathbf{P}_j$  jak układ sił  $\mathbf{P}_j$  na przemieszczeniach wywołanych przez siły  $\mathbf{P}_i$ .



Gdy sprowadzimy oba układy sił do pojedynczych sił jednostkowych, działających w punkcie  $a$ , otrzymamy:

$$\mathbf{1}_a \cdot \bar{\mathbf{u}}_a = \bar{\mathbf{1}}_a \cdot \mathbf{u}_a. \quad (1.28)$$

Związek ten nosi nazwę zasady wzajemności przemieszczeń i został sformułowany przez J.C.Maxwella w 1864 r.

### 3. ALGORYTM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Jako metoda komputerowa, metoda elementów skończonych charakteryzuje się ściśle określonym, prostym algorytmem. Przedstawimy teraz najważniejsze kroki tego algorytmu. Niektóre z nich omówimy później bardzo szczegółowo.

#### A. Dyskretyzacja

W tej fazie następuje podział konstrukcji na elementy skończone. W przypadku konstrukcji prętowych jest to często podział naturalny, tzn. każdy prosty odcinek pręta staje się elementem. W przypadku konstrukcji powierzchniowych dzielimy obszar na elementy trójkątne, czworokątne, a w przypadku konstrukcji bryłowych tworzymy elementy czworościenne, sześciścienne.

Decydujemy o miejscach kontaktu elementów, podajemy współrzędne węzłów i sposób połączenia z nimi elementów.

#### B. Tworzenie macierzy sztywności elementów

Na podstawie danych topologicznych podanych w kroku pierwszym oraz danych materiałowych, tworzone są macierze wyrażające związki między siłami węzłowymi a przemieszczeniami węzłów elementu.

#### C. Agregacja czyli budowa globalnej macierzy sztywności

Macierze sztywności elementów dzielone są w tym kroku na bloki, a te na podstawie informacji o topologii konstrukcji wstawiane są do macierzy globalnej. Często na tym etapie do macierzy globalnej wprowadza się modyfikacje uwzględniające warunki brzegowe.

#### D. Budowa globalnego wektora obciążenia

Obliczane tu są wektory obciążeń elementów, a te po podzieleniu na odpowiednie bloki wstawiane są do globalnego wektora obciążeń węzłowych. Po zakończeniu budowy wektora należy zmodyfikować jego składowe tak, aby uwzględnione zostały warunki brzegowe.

### *E. Rozwiązanie układu równań*

Na tym etapie rozwiązany zostaje układ równań liniowych, w wyniku czego otrzymujemy przemieszczenia węzłów konstrukcji.

### *F. Obliczenie sił wewnętrznych i reakcji więzów*

Po obliczeniu przemieszczeń można obliczyć odkształcenia, naprężenia i siły wewnętrzne w konstrukcji. Po obliczeniu sił węzłowych elementów obliczyć też można reakcje więzów (podpór) konstrukcji.

Systemy MES mają zwykle budowę modułową. Poszczególne etapy algorytmu realizowane są przez wyspecjalizowane moduły systemu.

Krok pierwszy (A) uzupełniony podaniem danych materiałowych i opisem obciążenia konstrukcji realizowany jest przez moduł nazywany preprocesorem. W dawnych systemach plik danych tworzony był „ręcznie” w edytorze tekstów. Obecnie taką sytuację spotyka się bardzo rzadko, gdyż podanie danych dla typowego zadania MES (kilka tysięcy węzłów) jest pracą bardzo żmudną. Współczesne preprocesory są zwykle programami graficznymi wyposażonymi w narzędzia ułatwiające generację siatek elementów.

Etapy (B), (C), (D), (E) realizowane są zwykle przez moduł zwany procesorem. Oprócz opisanych wcześniej operacji, procesor często zajmuje się odpowiednim uporządkowaniem równań, aby zmniejszyć ilość pamięci niezbędnej do przechowania macierzy sztywności i przyspieszyć proces rozwiązania układu równań.

Etap szósty (F) uzupełniony wizualizacją wyników realizowany jest przez postprocesor. Duża ilość wyników jaką uzyskujemy po rozwiązaniu układu równań i obliczeniu sił wewnętrznych sprawia, że bardzo trudno analizować je bez pomocy technik wizualnych. Współczesne systemy MES zaopatrzone są w graficzne postprocesory rysujące kolorowe mapy naprężeń, przemieszczeń i innych ułatwiających analizę parametrów.

Ponieważ techniki wizualizacji, choć mocno związane z metodą elementów skończonych, nie są jej częścią i nie będą omawiane w tej książce. Skupimy się na tych etapach, które związane są z obliczeniami a więc na procesorze i części postprocesora.

### **3.1. Tworzenie macierzy sztywności elementu**

Jak już wspominaliśmy na wstępie tego rozdziału (p.1.1) po podziale konstrukcji na elementy skończone zakładamy, że kontaktują się one ze sobą tylko w węzłach. Wygodnie będzie wyobrazić sobie węzeł jako punkt materialny, poruszający się w czasie deformacji spowodowanej oddziaływaniem zewnętrznym na konstrukcję (siły, temperatura itp.). Ruch

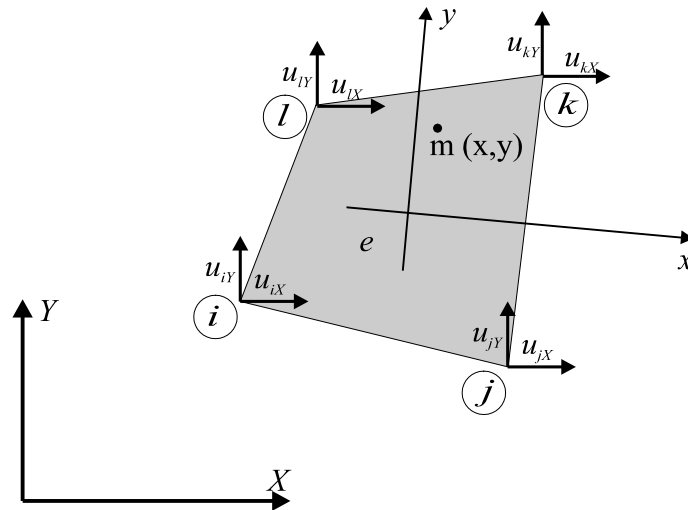
węzła można opisać podając składowe wektorów przemieszczenia. W zależności od typu elementu interesować nas będą różne rodzaje tego ruchu. Raz będą to tylko przesunięcia (w elementach kratownic, tarczach, bryłach), innym razem niezbędne okażą się również kąty obrotu (w elementach ramowych, płyt i powłok). Wszystkie niezbędne składowe przemieszczenia węzła tworzą układ parametrów nazywany stopniami swobody. Ilość stopni swobody węzła oznaczać będziemy przez  $N_D$ .

W Tab.1.1 podane są informacje o ilości stopni swobody węzłów typowych konstrukcji inżynierskich. Stopnie swobody podane są jako składowe wektorów przemieszczeń w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Tab.1.1

Rodzaj konstrukcji	Ilość stopni swobody $N_D$	Przesunięcia			Obroty		
		$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
krata płaska	2	•	•				
krata przestrzenna	3	•	•	•			
rama płaska	3	•	•				•
rama przestrzenna	6	•	•	•	•	•	•
ruszt	3			•	•	•	
tarcza	2	•	•				
płyta	3			•	•	•	
powłoka	6	•	•	•	•	•	•
bryła	3	•	•	•			

Wyobraźmy sobie dowolny element (dla wygody weźmiemy element płaski, który łatwo narysować) czworokątny o numerze  $e$  (Rys.1.1). Węzły tego elementu są ponumerowane lokalnie:  $i, j, k, l$  oraz mają swoje numery globalne:  $n_i, n_j, n_k, n_l$ . Współrzędne węzłów podajemy zawsze w układzie globalnym  $XY$ , ale dla wygody używamy w czasie tworzenia macierzy sztywności elementu, układu lokalnego  $xy$ , który wybieramy zupełnie dowolnie.



Rys.1.1

Przemieszczenia węzła grupujemy w wektorze przemieszczeń:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_{jX} \\ u_{jY} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_{kX} \\ u_{kY} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_l = \begin{bmatrix} u_{lX} \\ u_{lY} \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Zbiór przemieszczeń wszystkich węzłów elementu tworzy wektor przemieszczeń węzłowych elementu:

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ u_{jX} \\ u_{jY} \\ u_{kX} \\ u_{kY} \\ u_{lX} \\ u_{lY} \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Przemieszczenie dowolnego punktu  $m$  leżącego wewnątrz elementu zapiszemy w postaci wektora:

$$\mathbf{u}(X, Y) = \begin{bmatrix} u_X(X, Y) \\ u_Y(X, Y) \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Gdy składowe wektorów określone są w układzie lokalnym oznaczać je będziemy znakiem ' (prim) np.:

$$\mathbf{u}'(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix}. \quad (1.31a)$$

Podobne oznaczenia można wprowadzić w równaniach (1.29) i (1.30), lecz na razie dla wygody używać będziemy jedynie związków globalnych.

Przyjmujemy teraz, że przemieszczenie dowolnego punktu  $m$  można uzależnić od przemieszczeń węzłów elementu:

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{u}^e, \quad (1.32)$$

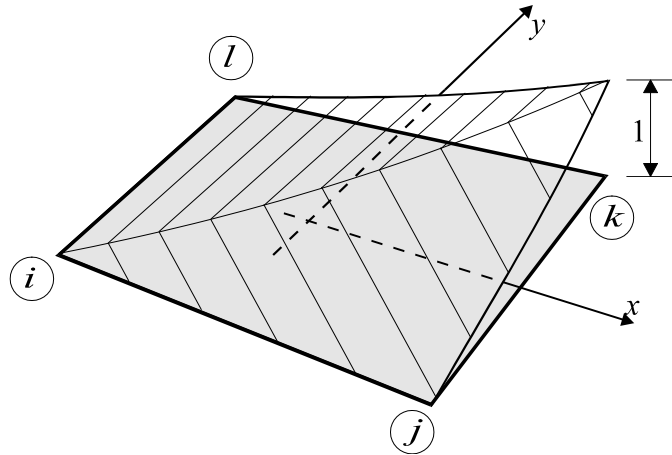
gdzie  $\mathbf{N}(x, y)$  jest macierzą, której składowe zależą od współrzędnych punktu. Wymiary macierzy  $\mathbf{N}(x, y)$  zależą od rodzaju elementu. Ilość wierszy macierzy  $\mathbf{N}(x, y)$  równa jest ilości stopni swobody punktu  $m$  a ilość kolumn - ilości stopni swobody elementu. W naszym przykładzie, gdzie punkt ma dwa stopnie swobody, a element ma  $4 \times 2 = 8$  stopni swobody, macierz  $\mathbf{N}(x, y)$  musi mieć dwa wiersze i osiem kolumn.

Równanie (1.32) wygodnie będzie zapisać w rozwiniętej postaci:

$$\mathbf{u}(x, y) = \left[ \mathbf{N}_i(x, y) \quad \mathbf{N}_j(x, y) \quad \mathbf{N}_k(x, y) \quad \mathbf{N}_l(x, y) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix}, \quad (1.32a)$$

gdzie macierze  $\mathbf{N}_i(x, y) \dots \mathbf{N}_l(x, y)$  są macierzami kwadratowymi zawierającymi funkcje wpływu przemieszczeń węzłów  $i \dots l$  na przemieszczenie punktu  $m$ . Funkcje te w metodzie elementów skończonych noszą nazwę *funkcji kształtu*, odgrywają one kluczową rolę w formułowaniu równań MES. Macierze  $\mathbf{N}_i(x, y) \dots \mathbf{N}_l(x, y)$  noszą nazwę macierzy funkcji kształtu węzłów  $i \dots l$ , a macierz  $\mathbf{N}^e(x, y)$  jest macierzą funkcji kształtu elementu.

Oczywiste jest, że funkcje kształtu powinny spełniać pewne warunki, które decydują o ich przydatności do aproksymacji pola przemieszczeń elementu. Wyobraźmy sobie, że punkt  $m$  znajduje się w węźle, wtedy jego przemieszczenia powinny być równe przemieszczeniom tego węzła, a przemieszczenia węzłów pozostałych nie powinny mieć na nie żadnego wpływu (Rys.1.2).



Rys.1.2

Warunek ten wyrazić można następująco:

$$N_p(x_q, y_q) = \delta_{pq}, \quad (1.33)$$

gdzie  $\delta_{pq}$  jest deltą Kroneckera:

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & - \text{gdy } p=q, \\ 0 & - \text{gdy } p \neq q \end{cases}$$

a  $p$  i  $q$  oznaczają dowolny z lokalnych numerów węzłów  $i \dots l$ .

Warunki typu (1.33) pozwalają określić współczynniki funkcji kształtu. Innymi warunkami, które spełniać muszą funkcje  $N_p(x, y)$ , będziemy zajmowali się w jednym z następných punktów.

Podstawiając równanie (1.32) do (1.2) obliczymy składowe wektora odkształcenia elementu:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{u}^e, \quad (1.34)$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest macierzą o wymiarach  $3 \times N_D$  dla płaskich stanów naprężenia i odkształcenia lub  $6 \times N_D$  dla stanów przestrzennych ( $N_D$  jest ilością stopni swobody węzła), zawierającą operatory różniczkowe wynikające z definicji odkształcenia (1.2).

Dla elementu tarczowego  $N_D=2$ , macierz operatorów różniczkowych przyjmuje postać następującą:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

gdzie symbol  $\partial_x$  oznacza różniczkowanie względem  $x$ :  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ , a  $\partial_y$  - względem  $y$ .

Przyjmujemy oznaczenia:

$$\mathbf{D} \mathbf{N}^e(x, y) = \mathbf{B}^e(x, y) \quad (1.36)$$

i konsekwentnie

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \mathbf{N}_i(x, y) &= \mathbf{B}_i(x, y), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{N}_l(x, y) = \mathbf{B}_l(x, y),$$

ułatwiające dalsze przekształcenia.

Po uwzględnieniu tego oznaczenia związek (1.34) przedstawić można następująco:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^e(x, y) \mathbf{u}^e, \quad (1.38)$$

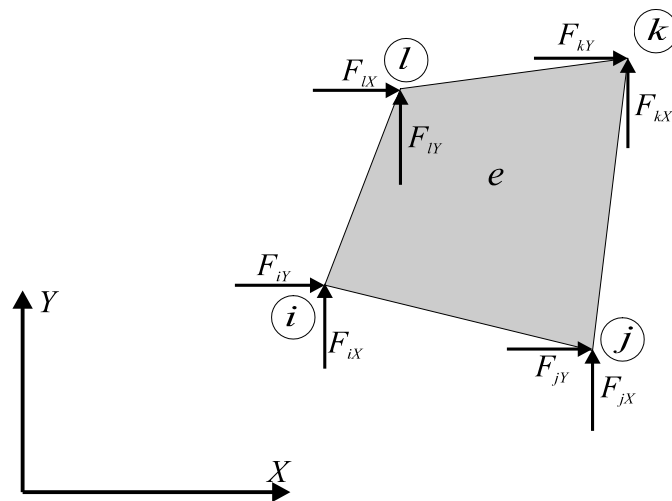
Macierz  $\mathbf{B}(x, y)$  ma wymiary  $3 \times n_D^e$  (lub  $6 \times n_D^e$  dla przestrzennego stanu naprężenia).

Dla czworokątnego elementu tarczy macierz  $\mathbf{B}(x, y)$  ma wymiary  $3 \times 8$ . Podobnie jak poprzednio  $\mathbf{N}(x, y)$ , podzielimy teraz macierz  $\mathbf{B}(x, y)$  na bloki:

$$\mathbf{B}^e(x, y) = [\mathbf{B}_i(x, y) \quad \mathbf{B}_j(x, y) \quad \mathbf{B}_k(x, y) \quad \mathbf{B}_l(x, y)]. \quad (1.39)$$

Macierze  $\mathbf{B}_i \dots \mathbf{B}_l$  noszą nazwę macierzy geometrycznych węzłów  $i \dots l$ , a  $\mathbf{B}^e(x, y)$  macierzą geometryczną elementu  $e$ .

Zastąpimy teraz oddziaływania występujące między węzłami a elementem siłami skupionymi. Schemat tych oddziaływań pokazuje Rys.1.3.



Rys.1.3

Zbierzemy teraz składowe sił węzłowych w wektory sił węzłowych:

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} F_{jX} \\ F_{jY} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} F_{kX} \\ F_{kY} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} F_{lX} \\ F_{lY} \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Oraz siły oddziałujące na element w wektor sił węzłowych elementu:

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \\ \mathbf{f}_k \\ \mathbf{f}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ F_{kX} \\ F_{kY} \\ F_{lX} \\ F_{lY} \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Poszukujemy zależności między siłami węzłowymi  $\mathbf{f}^e$  a przemieszczeniami węzłowymi  $\mathbf{u}^e$ .

Zastosujemy zasadę prac wirtualnych (1.22) traktując siły węzłowe jak obciążenie zewnętrzne elementu. Element obciążony jest także na swoim brzegu i wewnątrz, a obciążenie to, zależne od współrzędnych punktu, oznaczmy przez:

$$\mathbf{q}(x, y) = \begin{bmatrix} q_x(x, y) \\ q_y(x, y) \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Równania konstytutywne(1.5) (lub np.(1.12), (1.13) dla płaskiego stanu naprężenia) uzupełnimy teraz o części pozwalające uwzględnić odkształcenie i naprężenia początkowe.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o) + \boldsymbol{\sigma}_o, \quad (1.43)$$

gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}_o$  jest wektorem odkształceń początkowych (np. spowodowanych obciążeniem termicznym), a  $\boldsymbol{\sigma}_o$  wektorem naprężeń początkowych.

Zapisujemy teraz równanie (1.22) wyrażające równość pracy sił zewnętrznych i sił wewnętrznych elementu w równowadze:

$$(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e + \int_A \mathbf{u}(x, y)^T \mathbf{q}(x, y) dA = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (1.44)$$

Lewa strona tego równania przedstawia pracę sił zewnętrznych a prawa - sił wewnętrznych elementu, A oznacza powierzchnię elementu a V jego objętość. Podstawimy do tego równania zależności (1.32), (1.38) oraz (1.43):

$$(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e + \int_A (\mathbf{N}^e \mathbf{u}^e)^T \mathbf{q} dA = \int_V (\mathbf{B}^e \mathbf{u}^e)^T [\mathbf{D}(\mathbf{B}^e \mathbf{u}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_o) + \boldsymbol{\sigma}_o] dV. \quad (1.45)$$

Po przekształceniu otrzymamy z tego równania ostateczną formę:



$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}_q^e - \mathbf{f}_{\varepsilon_o}^e + \mathbf{f}_{\sigma_o}^e . \quad (1.46)$$

gdzie oznaczono:

– wektor sił węzłowych wywołanych obciążeniem zewnętrznym:

$$\mathbf{f}_q^e = \int_A (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{q} dA , \quad (1.47)$$

– wektor sił węzłowych wywołanych odkształceniem początkowym:

$$\mathbf{f}_{\varepsilon_o}^e = \int_V (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \varepsilon_o dV , \quad (1.48)$$

– wektor sił węzłowych wywołanych naprężeniami początkowymi:

$$\mathbf{f}_{\sigma_o}^e = \int_V (\mathbf{B}^e)^T \sigma_o dV , \quad (1.49)$$

– macierz sztywności elementu:

$$\mathbf{K}^e = \int_V (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e dV . \quad (1.50)$$

Obliczone tu wektory obciążeń węzłowych obejmują siły działające na element. Przy układaniu równań równowagi węzłów należy je wziąć ze znakiem przeciwnym.

Macierz  $\mathbf{K}^e$  można podzielić na bloki macierzy kwadratowych  $\mathbf{K}_{pq}^e$  opisujących wpływ przemieszczeń węzła  $q$  na siły w węźle  $p$ :

$$\mathbf{K}_{pq}^e = \int_V (\mathbf{B}_p^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_q^e dV . \quad (1.51)$$

W macierzy sztywności elementu czterowęzłowego (Rys.1.3) będzie tych bloków  $4 \times 4 = 16$ . Ponieważ macierz sztywności jest symetryczna tzn.  $\mathbf{K}^e = (\mathbf{K}^e)^T$ , co wynika z równania (1.50) a jest prostą konsekwencją zasady wzajemności prac E.Bettiego, to bloki  $\mathbf{K}_{pq}^e$  spełniać muszą warunki:

$$\mathbf{K}_{qp}^e = (\mathbf{K}_{pq}^e)^T . \quad (1.52)$$

Równanie (1.50) (lub (1.51)) opisuje kluczowy etap budowy równań równowagi konstrukcji. Nie zawsze jednak macierz sztywności musi być wyznaczana tym sposobem. Dla elementów prostych takich, jak pręty kratownicy lub ramy istnieją inne (nieraz prostsze) sposoby otrzymania związku (1.46). Pokażemy użycie tych sposobów w rozdziałach następnych.

Jeżeli wszystkie przekształcenia prowadzące do równania (1.50) wykonywane były w lokalnym układzie współrzędnych  $(xyz)$ , to otrzymana macierz sztywności powinna być

jeszcze przetransformowana do układu globalnego (XYZ). Transformacja ta polega na mnożeniu macierzy  $\mathbf{K}^{e'}$  (znak prim oznacza macierz w układzie lokalnym) przez macierze obrotu elementu. Szczegółowa budowa tych macierzy omówiona jest w rozdziałach II, III i IV, tu pokażemy jedynie ideę przekształceń:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}^{e'} (\mathbf{R}^e)^T, \quad (1.53)$$

$$\text{gdzie } \mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & & & \\ & \mathbf{R}_j & & \\ & & \mathbf{R}_k & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

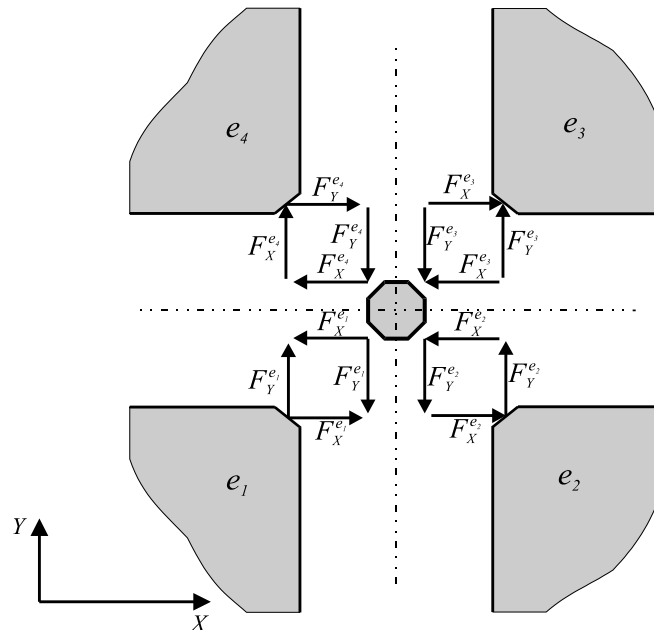
$\mathbf{R}_i \dots \mathbf{R}_k$  - macierzami obrotu węzłów  $i \dots k$ . Macierze obrotu węzłów zawierają cosinusy kątów między osiami układów globalnego i lokalnego:

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C_{xX} & C_{xY} & C_{xZ} \\ C_{yX} & C_{yY} & C_{yZ} \\ C_{zX} & C_{zY} & C_{zZ} \end{bmatrix}, \quad (1.55)$$

gdzie np.  $C_{xY} = \cos(\alpha_{xY})$ , itd.,  $\alpha_{xY}$  jest kątem między osią  $x$  układu lokalnego i osią  $Y$  układu globalnego.

### 3.2. Agregacja globalnej macierzy sztywności

Zależność (1.46) pozwala zapisać równania równowagi węzła w postaci zawierającej przemieszczenia węzłów jako niewiadome.



Rys.1.4

Wyobrazimy sobie węzeł jako niezależną część konstrukcji. Odłączmy elementy od węzłów a ich oddziaływania zastąpimy siłami węzłowymi (Rys.1.4).

Zapiszemy układ równań równowagi węzła w postaci skalarnej:

$$\sum_{k=1}^{E_n} F_X^{e_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{E_n} F_Y^{e_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{E_n} F_Z^{e_k} = 0, \quad (1.56a)$$

Dla węzłów z obrotowymi stopniami swobody konieczne będą także równania równowagi momentów:

$$\sum_{k=1}^{E_n} M_X^{e_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{E_n} M_Y^{e_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{E_n} M_Z^{e_k} = 0. \quad (1.56b)$$

W równaniach (1.56) sumowanie odbywa się po wszystkich elementach dołączonych do węzła, a więc indeksy  $e_1, e_2 \dots e_{E_n}$  są numerami elementów dołączonych do węzła,  $E_n$  jest ilością elementów dołączonych do węzła  $n$ . Wstawimy do równań (1.56) związki (1.46) pamiętając o zmianie znaku sił węzłowych, wynikającej ze zmiany zwrotu sił, działających na elementy i węzeł (Rys.1.4):

$$-\sum_{k=1}^{E_n} \mathbf{f}_n^{e_k} = 0. \quad (1.57)$$

W równaniu tym symbol  $\mathbf{f}_n^{e_k}$  oznacza tylko te składowe wektora  $\mathbf{f}^{e_k}$ , które działają na węzeł  $n$ . Przekształcimy to równanie do wygodniejszej postaci:

$$\sum_{k=1}^{E_n} \mathbf{K}_n^{e_k} \mathbf{u}_n^{e_k} = \mathbf{p}_n^{e_k}, \quad (1.58)$$

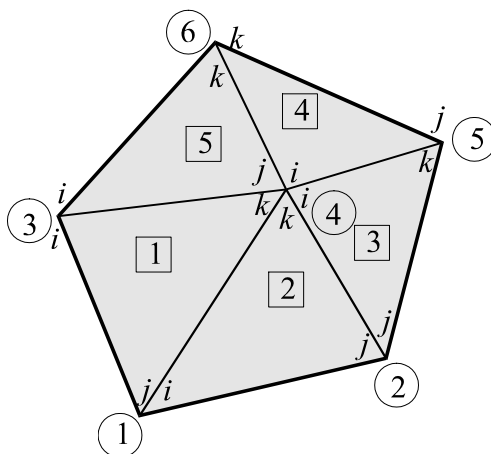
gdzie  $\mathbf{p}^e = \mathbf{f}_q^e + \mathbf{f}_{\varepsilon_o}^e - \mathbf{f}_{\sigma_o}^e$  jest wektorem sił węzłowych wywołanych obciążeniem zewnętrznym, odkształceniami i naprężeniami początkowymi.

Układając równania analogiczne do (1.56) dla każdego węzła konstrukcji otrzymamy układ równań, który pozwoli wyliczyć przemieszczenia węzłów konstrukcji. Ponieważ sumowanie w równaniach (1.56) odbywa się po elementach (przy czym sumowane są tylko te wektory sił, które związane są z równoważonym węzłem), to algorytm tworzenia układu równań oparty na równoważeniu kolejnych węzłów jest nieefektywny. Łatwiej budować układ równań przez kolejne wstawianie do niego macierzy sztywności elementów.

Do operacji tej potrzebne jest uporządkowanie węzłów i stopni swobody. Dotychczas używaliśmy lokalnych numerów węzłów elementu  $i, j, k, l \dots$ , jednak w czasie budowy globalnego układu równań konieczne jest wprowadzenie globalnej numeracji węzłów. Niech  $n_i$  oznacza globalny numer węzła o lokalnym numerze  $i$ ,  $s_p$  niech oznacza globalny numer

stopnia swobody o lokalnym numerze  $p$ . Utworzmy teraz prostokątną macierz połączeń elementu  $e - \mathbf{A}^e$ . Ilość wierszy macierzy  $\mathbf{A}^e$  jest równa globalnej ilości stopni swobody konstrukcji  $N_k$ , ilość kolumn jest równa ilości stopni swobody elementu  $e - N_D^e$ . Większość składowych macierzy  $\mathbf{A}^e$  jest równa zero, wyjątek stanowią składowe o wartości 1, które usytuowane są w wierszach  $s_p$  i kolumnach  $p$ . Struktura macierzy  $\mathbf{A}^e$  zawiera więc informacje o połączeniach elementu z węzłami lub ściślej o tym, który stopień swobody elementu odpowiada globalnemu stopniowi swobody konstrukcji. Budowę macierzy połączeń najłatwiej prześledzić można na przykładzie.

Rys.1.5 przedstawia tarczę podzieloną na pięć elementów trójkątnych. Tarcza ma sześć węzłów ponumerowanych liczbami od 1 do 6, każdy element ma lokalne oznaczenia węzłów  $i, j, k$ . Tab.1.2 przedstawia globalną numerację stopni swobody tarczy.



Rys.1.5

Tab.1.2

Nr węzła $n$	Globalne numery stopni swobody węzłów	
	$u_{nX}$	$u_{nY}$
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	7	8
5	9	10
6	11	12

Tab.1.3

Nr elementu $e$	Globalne numery stopni swobody elementu $s_p$ - wektory alokacji					
	$u_{iX}$	$u_{iY}$	$u_{jX}$	$u_{jY}$	$u_{kX}$	$u_{kY}$
	1	2	3	4	5	6
1	5	6	1	2	7	8
2	1	2	3	4	7	8
3	7	8	3	4	9	10
4	7	8	9	10	11	12
5	5	6	7	8	11	12

Tab.1.3 przedstawia zależności między lokalnymi i globalnymi stopniami swobody. Macierz połączeń zbudowana dla elementu nr 3 będzie miała więc postać następującą:

$$\mathbf{A}^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \end{matrix}$$

gdzie dla łatwiejszej orientacji pominięto wszystkie elementy zerowe.

Pomnożenie wektora sił węzłowych elementu przez macierz połączeń spowoduje przeniesienie odpowiednich bloków wektora lokalnego do wektora globalnego. Możliwe jest teraz proste sumowanie tych wektorów:

$$\sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{A}^e \mathbf{f}^e = \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{A}^e \mathbf{p}^e . \quad (1.59)$$

Należy jeszcze wyrazić wektor przemieszczeń węzłowych elementów przez wektor globalny:

$$\mathbf{u}^e = (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{u} ,$$

który należy podstawić do równania (1.59). Ostatecznie otrzymujemy układ równań w postaci:

$$\sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{u} = \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{A}^e \mathbf{p}^e , \quad (1.60)$$

lub krócej

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p} . \quad (1.61)$$

Macierz  $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e (\mathbf{A}^e)^T$  nosi nazwę globalnej macierzy sztywności konstrukcji, wektor

$\mathbf{p} = \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{A}^e \mathbf{p}^e$  jest globalnym wektorem sił węzłowych konstrukcji, wektor  $\mathbf{u}$  zawierający

przemieszczenia wszystkich węzłów jest globalnym wektorem przemieszczeń. Podobna metoda agregacji opisana jest w książce G. Rakowskiego [12], gdzie macierz  $\mathbf{A}^T$  nosi nazwę macierzy przylegania.

Metoda agregacji wykorzystująca macierz połączeń nie jest odpowiednia do komputerowej implementacji, gdyż operuje dużymi macierzami  $\mathbf{A}^e$ . Bardziej efektywnym sposobem jest wykorzystanie informacji zawartych w tzw. wektorach alokacji. Wektory te dla omawianego przykładu tarczy zawarte są w Tab.1.3. Metoda agregacji, posługująca się wektorami alokacji omówiona będzie w rozdziale drugim w czasie budowy macierzy sztywności kratownicy.

### 3.3. Uwagi dotyczące funkcji kształtu elementu

Funkcje aproksymujące pole przemieszczeń wewnątrz elementu czyli funkcje kształtu, opisane w p.1.3.1, nie mogą być wybierane zupełnie dowolnie. Powinny one spełniać pewne warunki, które decydują o ich jakości lub przydatności do aproksymacji przemieszczeń, odkształceń a w konsekwencji naprężeń. Kryteria te przytaczamy za O.C.Zienkiewiczem [19].

*A. Kryterium ruchu sztywnego*

Funkcje kształtu powinny być tak dobrane, aby nie pozwalały na powstanie naprężeń w elemencie, którego przemieszczenia wynikają jedynie z ruchu elementu jako ciała sztywnego.

#### *B. Kryterium stałości odkształceń*

Funkcje kształtu powinny zapewniać możliwości powstania stałego pola odkształceń wewnątrz elementu.

#### *C. Kryterium zgodności odkształceń*

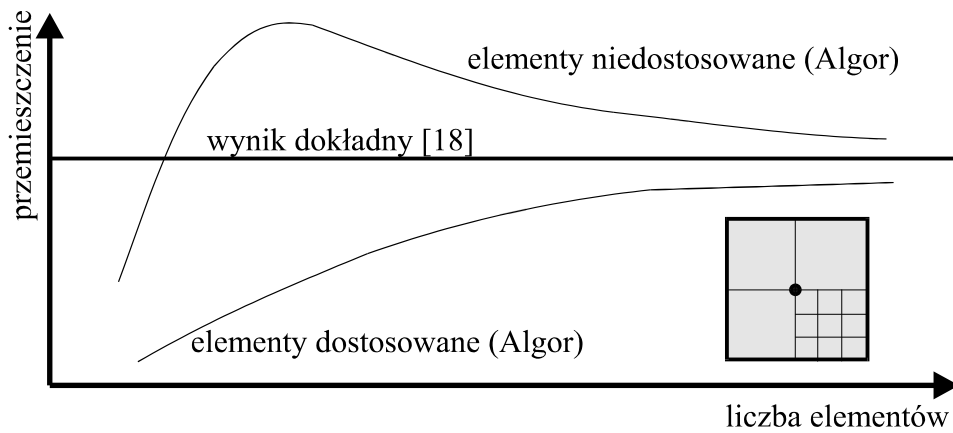
Funkcje kształtu powinny zapewniać ciągłość przemieszczeń wewnątrz elementu, zgodność przemieszczeń i skończone wartości odkształceń na brzegach sąsiadujących elementów.

Kryterium (A) i (B) wydają się oczywiste. Ponieważ możliwe są takie stany przemieszczeń i odkształceń, w których powstają stałe lub zerowe odkształcenia (naprężenia), to funkcje aproksymujące powinny bezwzględnie umożliwić odtworzenie tych stanów. Spełnienie warunków (A) i (B) zapewniają stałe i liniowe człony w wielomianach, z których najczęściej budujemy funkcje kształtu. Kryterium (B) jest uogólnieniem kryterium (A) i zostało sformułowane w 1965 r. przez Bazeleya, Cheunga, Ironsa i Zienkiewicza [19,20].

Kryterium (C) wymaga, aby funkcje kształtu zapewniały ciągłość pochodnych do rzędu o jeden niższego niż występujące w macierzy  $\mathbf{D}$  (por. równ. (1.34)) operatory różniczkowe dające odkształcenia w elemencie. Wyjaśnimy to na przykładzie. W tarczy odkształcenia dane są przez pierwsze pochodne funkcji kształtu (por. (1.34) i (1.35)), ponieważ pole przemieszczeń musi być ciągłe na granicy między elementami, to funkcje kształtu muszą być klasy  $C^0$ . Dla elementów płytowych rolę przemieszczeń pełnią krzywizny wyrażone przez pochodne drugiego rzędu (por. rozdz.VII), więc funkcje kształtu płyty powinny zapewnić ciągłość powierzchni ugięcia płyty i jej pierwszych pochodnych wewnątrz i na granicach między elementami. Pole przemieszczeń płyty powinno być zatem ciągłe i gładkie w obszarze płyty. O takich funkcjach mówimy, że są klasy  $C^1$ .

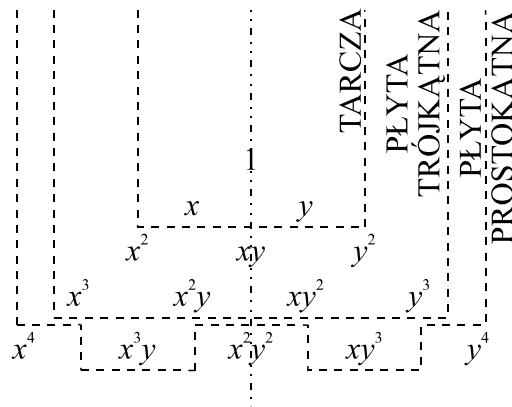
Kryterium (A) i (B) muszą być koniecznie spełnione, kryterium (C) nie musi być spełnione rygorystycznie, np. funkcje kształtu elementów płytowych nie spełniają często warunku gładkości (ciągłości pierwszych pochodnych na granicach elementu). Jeżeli spełnione są wszystkie kryteria, to o elementach opisywanych przez te funkcje mówimy, że są dostosowane. Jeżeli spełnione są tylko kryteria (A) i (B) to elementy nazywamy niedostosowanymi.

Rezultat stosowania elementów dostosowanych i niedostosowanych przedstawiony jest na Rys.1.6, gdzie podano zbieżność wyników uzyskanych przy pomocy różnych typów elementów, użytych do dyskretyzacji kwadratowej płyty.



Rys.1.6

Oprócz trzech wymienionych kryteriów dodać jeszcze można inne, które wskazują na sposób doboru wielomianów aproksymujących. Dobór ten powinien zapewniać izotropię względem osi układu współrzędnych. Pokażemy to na przykładzie budowania funkcji kształtu elementów płaskich (tarcza, płyta). Jeżeli zbiór wielomianów aproksymujących przedstawimy w postaci trójkąta Pascala, to wybór członów tego trójkąta powinien być symetryczny względem jego osi. Pokazuje to Rys.1.7.



Rys.1.7

Możliwe jest też użycie wielomianów Hermite'a (opisanych w rozdziale IV tej książki) lub Lagrange'a [19], zawsze jednak powinien być zachowany warunek izotropii.

Na temat funkcji kształtu istnieje obszerna literatura, zalecamy zapoznanie się z książkami [1, 12, 13, 20].



(1.13) (1.17) (1.35)

(1.36) (1.38) (1.50)

(1.53)

## ROZDZIAŁ I . WPROWADZENIE DO METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH..... 8

1. GENEZA I POSTAWOWA KONCEPCJA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH .....	8
2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA I TWIERDZENIA MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO..	9
2.1. Założenia dotyczące liniowego modelu konstrukcji.....	9
2.2. Naprężenia i odkształcenia .....	10
2.3. Równania konstytutywne.....	11
2.4. Płaski stan naprężenia.....	12
2.5. Płaski stan odkształcenia .....	13
2.6. Równania równowagi .....	13
2.7. Zasada prac wirtualnych .....	14
2.8. Twierdzenie Clapeyrona .....	15
2.9. Twierdzenia E.Bettiego o wzajemności prac i J.C.Maxwella o wzajemności przemieszczeń.....	15
3. ALGORYTM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH .....	16
3.1. Tworzenie macierzy sztywności elementu .....	17
3.2. Agregacja globalnej macierzy sztywności .....	25
3.3. Uwagi dotyczące funkcji kształtu elementu .....	29