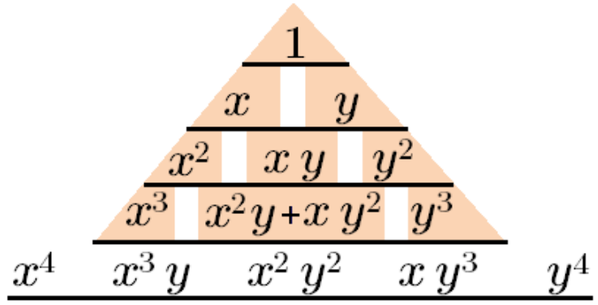
Tworzenie macierzy sztywności i obliczanie naprężeń w trókątnym elemencie płytowym

ORIGIN := 1

- *Pierwszą decyzję, którą musimy podjąć to wybrać wielomiany (funkcje bazowe), które będą tworzyć funkcje kształtu. Z piramidy wielomianów (rysunek) wybieramy kolejne części dbając o to aby końcowy rezultat zapewniał symetrię funkcji kszałtu ze względu na x i y, jest to symetria względem pionowej osi na rysunku piramidy.*

- *Węzeł elementu płytowego ma 3 stopnie swobody (ugięcie "w" i 2 obroty: φx i φy) , więc element trójkątny będzie miał 3x3=9 stopni swobody, musimy zatem wybrać 9 wielomianów, biorąc wszystkieod wierzchołka piramidy do dołu. W czwartym wierszu mamy 4 wielomiany więc licząc od góry będzie ich 10, czyli o jeden za dużo! Problem rozwiążemy dodając do siebie 2 środkowe:*

$$F(x,y) := \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & x\cdot y & y^2 & x^3 & x^2\cdot y + x\cdot y^2 & y^3 \end{bmatrix}$$



- *Policzymy teraz pochodne, które będą nam opisywały kąty obrotu powierzchni elementu płytowego:*

$$\Phi x(x,y) = \frac{d}{dy} F(x,y) \quad \text{-------->} \quad \Phi x(x,y) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2\cdot y & 0 & x^2 + 2\cdot x\cdot y & 3\cdot y^2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi y(x,y) - \frac{d}{dx} F(x,y) \quad \text{-------->} \quad \Phi y(x,y) := -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\cdot x & y & 0 & 3\cdot x^2 & 2\cdot x\cdot y + y^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Funkcje kształtu modelujące ugięcie płyty wywołane przemieszczeniem "i-tego"stopnia swobody będą teraz wyglądały następująco:*

$$N_i(x,y) = a_{i1}\cdot 1 + a_{i2}\cdot x + a_{i3}\cdot y + a_{i4}\cdot x^2 + a_{i5}\cdot x\cdot y + a_{i6}\cdot y^2 + a_{i7}\cdot x^3 + a_{i8}\cdot\left(x^2\cdot y + x\cdot y^2\right) + a_{i9}\cdot y^3$$

- *W formie macierzowej wygląda to bardzo prosto:* $N_i(x,y) = F(x,y)\cdot\alpha_i$ *, gdzie αi jest wektorem stałych:* $\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \\ a_{i6} \\ a_{i7} \\ a_{i8} \\ a_{i9} \end{bmatrix}$

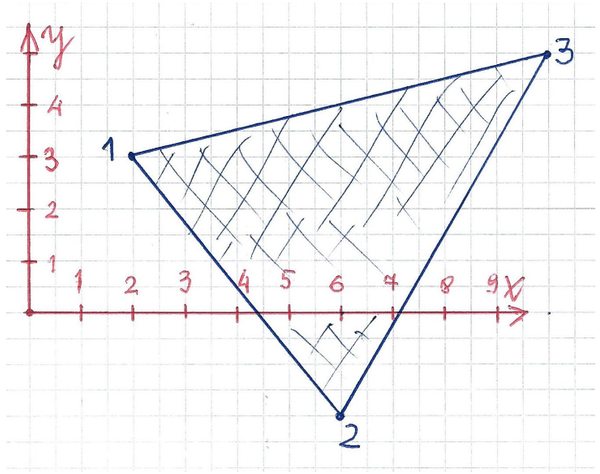
  - *Sta łe aij wyliczamy z warunków brzegowych, które wynikają z następujacego rozumowania: po podstawieniu współrzędnych węzła "i", żądamy aby funkcja Ni(xi,yi) dawała jednostkową wartość przemieszczenia (ugięcia lub kąta) odpowiadającego stopniowi swobody o numerze "i" a zerowe wartości*

    dla pozostałych stopni swobody: $N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$ *, gdzie δij oznacza tu "deltę" Kroneckera*

  - *Daje to następujący układ równań:* $M(x_j, y_j)\cdot\alpha_i = \delta_i$ ***M** jest tu macierzą współrzędnych węzłów elementu:*

$$M(x) := \text{stack}\left(F(x_1,x_2), \Phi x(x_1,x_2), \Phi y(x_1,x_2), F(x_3,x_4), \Phi x(x_3,x_4), \Phi y(x_3,x_4), F(x_5,x_6), \Phi x(x_5,x_6), \Phi y(x_5,x_6)\right)$$

- *Dla elementu trójkątnego przedstawionego na rysunku otrzymamy:*



$$xy := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ -2 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad Me := M(xy) \qquad Me = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 & 8 & 30 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 0 & 16 & 27 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -3 & 0 & -12 & -21 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & 36 & -12 & 4 & 216 & -48 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -12 & 2 & 0 & -108 & 20 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & 100 & 50 & 25 & 1000 & 750 & 125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 10 & 0 & 200 & 75 \\ 0 & -1 & 0 & -20 & -5 & 0 & -300 & -125 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Jeżeli chcemy znaleźć współczynniki funkcji kształtu przemieszczenia (ugięcia)węzła pierwszego*

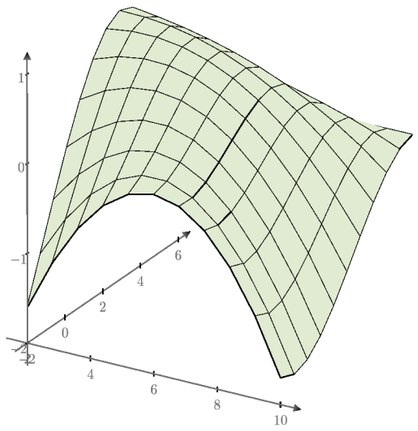
rozwiązujemy układ równań: $Me \cdot \alpha 1 = w1$ *czyli* $\alpha 1 = Me^{-1} \cdot w1$ *lub* $\alpha 1 = lsolve(Me, w1)$
itd...

$$w1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

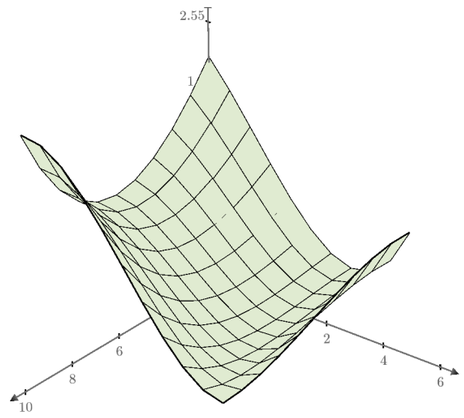
$$\alpha 1 := \mathrm{lsolve}(Me, w1) \qquad N1(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 1$$

$$\alpha 4 := \mathrm{lsolve}(Me, w2) \qquad N4(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 4$$

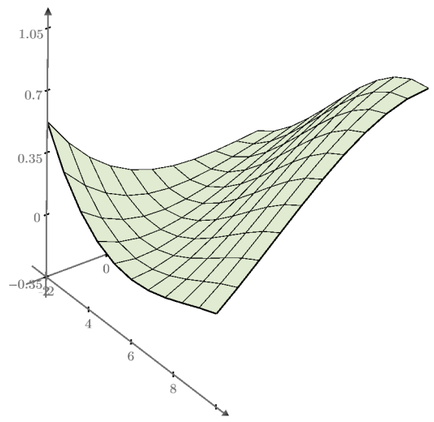
$$\alpha 7 := \mathrm{lsolve}(Me, w3) \qquad N7(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 7$$



$\mathrm{CreateMesh}(N1, 2, 10, -2, 5, 11)$



$\mathrm{CreateMesh}(N4, 2, 10, -2, 5, 11)$



$\mathrm{CreateMesh}(N7, 2, 10, -2, 5, 11)$

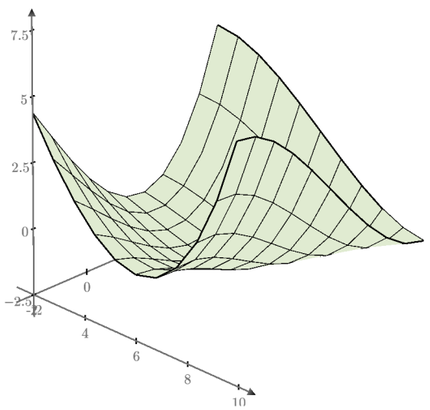
- *Podobnie postępujemy w przypadku kątów obrotu Φx*

$$\Phi x1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Phi x2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Phi x3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

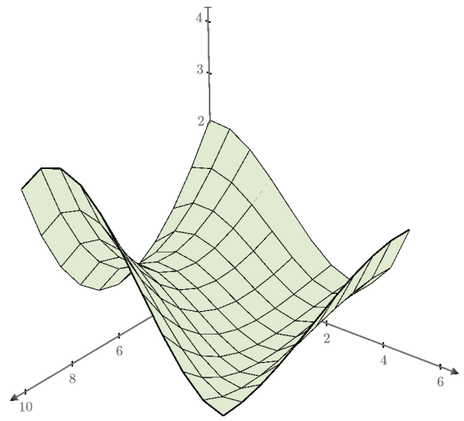
$$\alpha 2 := \mathrm{lsolve}(Me, \Phi x1) \quad N2(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 2$$

$$\alpha 5 := \mathrm{lsolve}(Me, \Phi x2) \quad N5(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 5$$

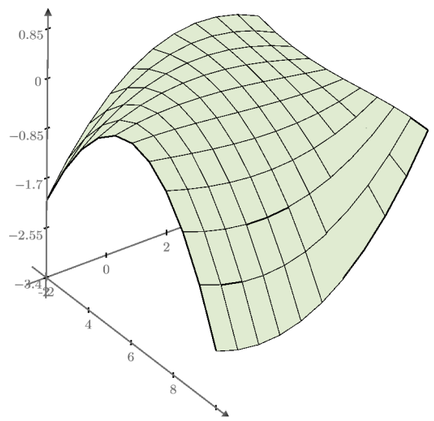
$$\alpha 8 := \mathrm{lsolve}(Me, \Phi x3) \quad N8(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 8$$



$\mathrm{CreateMesh}(N2, 2, 10, -2, 5, 11)$



$\mathrm{CreateMesh}(N5, 2, 10, -2, 5, 11)$



$\mathrm{CreateMesh}(N8, 2, 10, -2, 5, 11)$

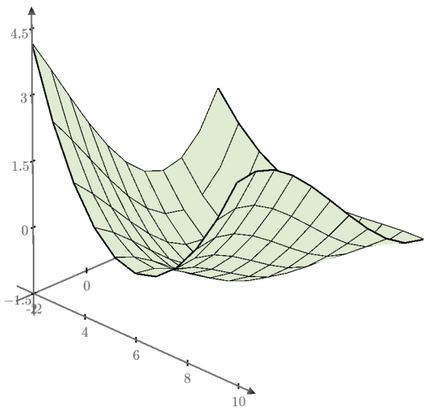
- *Dla kątów obrotu Φy mamy:*

$$\Phi y1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Phi y2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Phi y3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

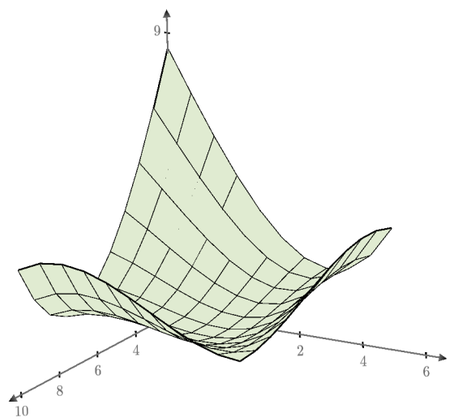
$$\alpha 3 := \mathrm{lsolve}(Me, \Phi y1) \quad N3(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 3$$

$$\alpha 6 := \mathrm{lsolve}(Me, \Phi y2) \quad N6(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 6$$

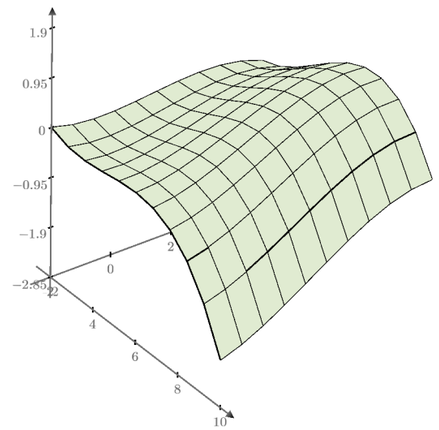
$$\alpha 9 := \mathrm{lsolve}(Me, \Phi y3) \quad N9(x,y) := F(x,y) \cdot \alpha 9$$



$\mathrm{CreateMesh}(N3, 2, 10, -2, 5, 11)$



$\mathrm{CreateMesh}(N6, 2, 10, -2, 5, 11)$



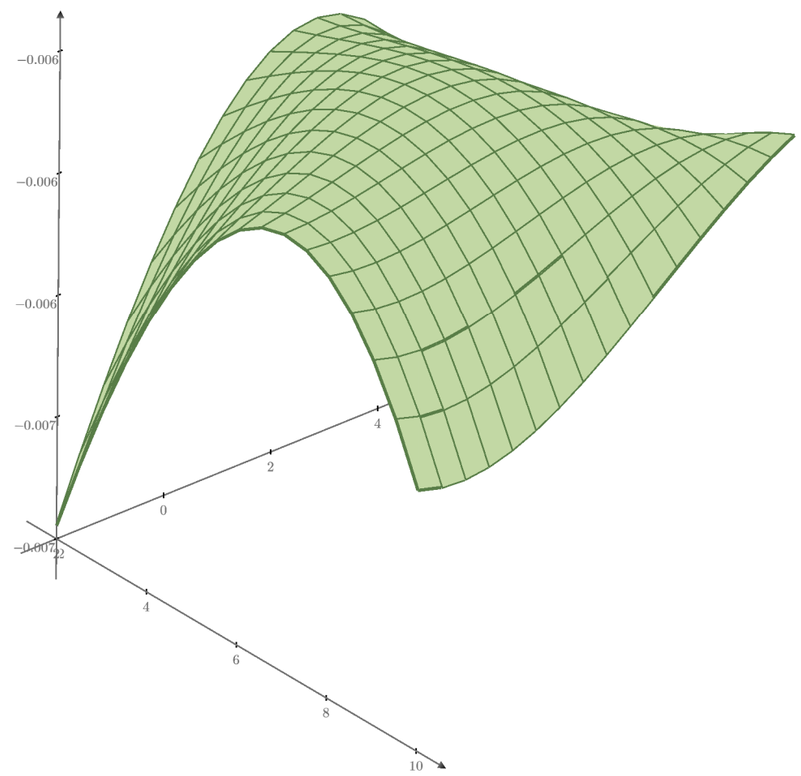
$\mathrm{CreateMesh}(N9, 2, 10, -2, 5, 11)$

- *Gdy mamy obliczyc odkształcenia elementu i znane już są przemieszczenia węzłów, można posłużyć sie 'drogą na skróty"*

$$u := \begin{bmatrix} -6.1\cdot 10^{-3} \\ -2.3\cdot 10^{-5} \\ -1.2\cdot 10^{-5} \\ -6.1\cdot 10^{-3} \\ 3.6\cdot 10^{-5} \\ -8.2\cdot 10^{-5} \\ -6.0\cdot 10^{-3} \\ 5.6\cdot 10^{-5} \\ -4.2\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$a := \mathrm{lsolve}(Me, u) \qquad N(x,y) := F(x,y)\cdot a$$

$$a = \begin{bmatrix} -0.007 \\ 1.838\cdot 10^{-4} \\ 3.627\cdot 10^{-4} \\ -3.165\cdot 10^{-6} \\ -8.838\cdot 10^{-5} \\ -4.028\cdot 10^{-5} \\ -1.17\cdot 10^{-6} \\ 5.715\cdot 10^{-6} \\ \vdots \end{bmatrix}$$



$\mathrm{CreateMesh}(N, 2, 10, -2, 5, 17)$

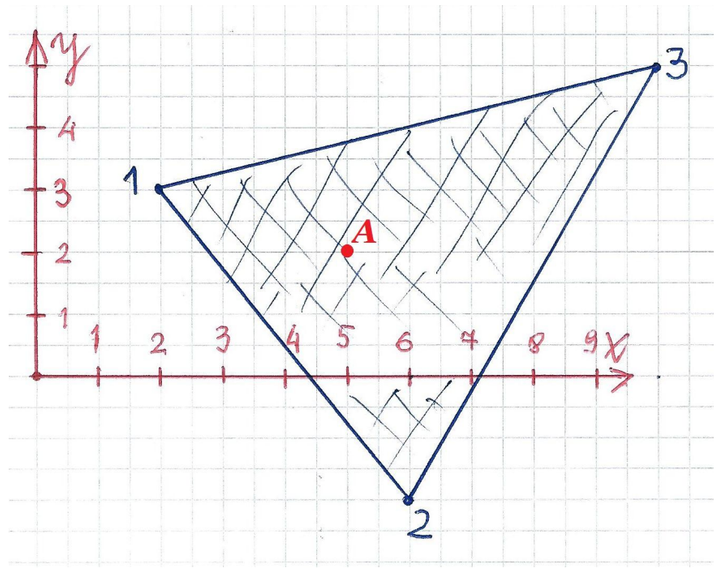
- *Obliczamy teraz odkształcenia*

$$\varepsilon x(x,y,z) := -z\cdot\left(2\cdot a_4 + 6\cdot a_7\cdot x + 2\cdot a_8\cdot y\right)$$

$$\varepsilon y(x,y,z) := -z\cdot\left(2\cdot a_6 + 2\cdot a_8\cdot x + 6\cdot a_9\cdot y\right)$$

$$\gamma xy(x,y,z) := -2\cdot z\cdot\left(a_5 + a_8\cdot 2\cdot (x+y)\right)$$

- *Odkształcenia w punkcie o współrzędnych (x,y,z)= (5,2,1)cm*



$$\varepsilon xA := \varepsilon x(5,2,1) = 1.857 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon yA := \varepsilon y(5,2,1) = 4.949 \cdot 10^{-5}$$

$$\gamma xyA := \gamma xy(5,2,1) = 1.676 \cdot 10^{-5}$$

$$E := 5 \cdot GPa \qquad \nu := 0.2$$

$$\sigma xA := (\varepsilon xA + \nu \cdot \varepsilon yA) \cdot \frac{E}{1-\nu^2} = 148.247\ kPa$$

$$\sigma yA := (\varepsilon yA + \nu \cdot \varepsilon xA) \cdot \frac{E}{1-\nu^2} = 277.082\ kPa$$

$$\tau A := \gamma xyA \cdot \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = 34.917\ kPa$$

- *Można też obliczenia przeprowadzić macierzowo:*

$$B(x,y) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \cdot x & 2 \cdot y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \cdot x & 6 \cdot y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \cdot x + 4 \cdot y & 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon(x,y,z) := -z \cdot B(x,y) \cdot a$$

$$eA := \varepsilon(5,2,1) = \begin{bmatrix} 1.857 \cdot 10^{-5} \\ 4.949 \cdot 10^{-5} \\ 1.676 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \qquad D := \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad \sigma := D \cdot eA = \begin{bmatrix} 148.247 \\ 277.082 \\ 34.917 \end{bmatrix} kPa$$