ROZDZIAŁ VII. STATYKA PŁYT

Płyty są jednym z częściej wykorzystywanych elementów konstrukcji. Spotkać je można niemal w każdej budowli lub konstrukcji mechanicznej. Geometryczny kształt płyty zdefiniować można podobnie jak tarczy (rozdz.VI), różnica dotyczy jednak sposobu obciążenia. Płyty obciążone są obciążeniem normalnym do swojej powierzchni, co wywołuje ich zginanie, nieobecne przy deformacji tarczy.

Analityczne metody wyznaczania ugięć i sił wewnętrznych w płytach zapoczątkowały prace Eulera, Bernuliego, Germain, Lagrange'a, Poissona, Naviera, które powstały na przełomie XVIII i XIX wieku [16]. Literatura poświęcona teorii płyt jest niezwykle bogata, zainteresowanym polecić można m.in. książki [9], [11], [18].

Metodami analitycznymi (przede wszystkim metodą szeregów Fouriera) uzyskano rozwiązania wielu ważnych zagadnień statyki i dynamiki płyt, zawodzą one jednak przy problemach o złożonych warunkach brzegowych lub w przypadkach skomplikowanych kształtów płyt. Uniwersalną metodą okazała się tu metoda elementów skończonych, która dostarcza rozwiązań przybliżonych, ale dostatecznie dokładnych dla zastosowań praktycznych.

7.1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA Z RÓWNANIA KLASYCZNEJ TEORII PŁYT

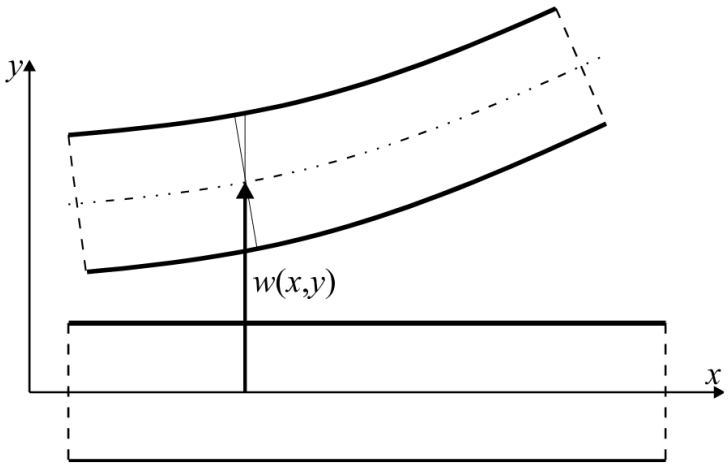
Przyjmiemy, że płyty, którymi będziemy się zajmowali spełniają założenia klasycznej teorii płyt cienkich [18]:

a) grubość płyty jest mała w porównaniu z jej pozostałymi wymiarami;
b) ugięcia płyty są małe w porównaniu z jej grubością;
c) płaszczyzna środkowa płyty nie ulega odkształceniu;
d) punkty leżące na normalnych do płaszczyzny środkowej przed odkształceniami, leżą na normalnych do powierzchni środkowej po odkształceniu;
e) naprężenia normalne do płaszczyzny płyty mogą być pominięte.

Z punktu d) tych założeń wynika, że przemieszczenia punktów leżących wewnątrz płyty zmieniają się liniowo na jej grubości (

Rys.7.1):

$$u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x},\ u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y},\ u_z = w(x,y)\,. \tag{7.1}$$



Rys.7.1

Odkształcenia wyrażą się więc zależnościami:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,. \tag{7.2}$$

Wektor odkształcenia można zatem przedstawić w postaci:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z\,\boldsymbol{\partial} w(x,y), \tag{7.3}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\partial}$ jest wektorem operatorów różniczkowych:

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_{xx} \\ \partial_{yy} \\ 2\partial_{xy} \end{bmatrix},\ \text{a}\ \partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ \partial_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \partial_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,.$$

Założymy płaski stan naprężenia w płycie, stąd wektor naprężenia wyznaczyć będzie można następująco:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} = -z\,\mathbf{D}\,\partial w(x,y), \tag{7.4}$$

gdzie **D** jest macierzą stałych sprężystych określoną dla PSN:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Wprowadzimy teraz pojęcia sił wewnętrznych (momentów i sił poprzecznych):

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz\,,\; M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz\,,\; M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz\,,$$

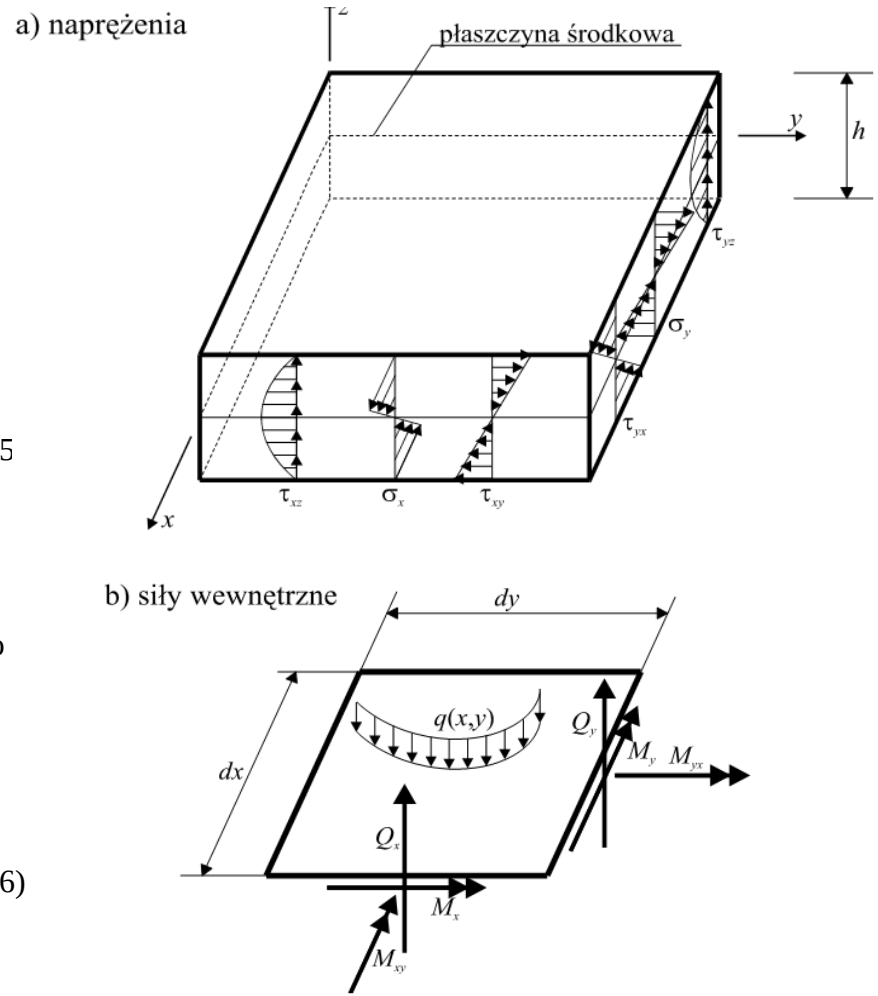
$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz\,,\; Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz\,. \tag{7.5}$$

Równowaga infinitezymalnego elementu płyty pokazanego na rys 7.2b prowadzi do układu równań:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x,y) = 0\,,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x\,, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y\,.$$



Rys.7.2

Po wykonaniu całkowań (7.5) przy uwzględnieniu (7.4) otrzymamy:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{7.7}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

gdzie D oznacza tzw. sztywność płytową zdefiniowaną równaniem:

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}. \tag{7.8}$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymujemy związki określające siły poprzeczne:

$$Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right),$$

$$Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right). \tag{7.9}$$

Podstawiając siły poprzeczne do pierwszego z równań otrzymamy:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}. \tag{7.10}$$

Jest to biharmoniczne cząstkowe równanie różniczkowe, które powinna spełniać funkcja ugięcia $w(x,y)$w obszarze płyty. Na krawędziach płyty powinny być spełnione warunki brzegowe:

a) $w = 0,\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0$ - na krawędzi utwierdzonej,

b) $w = 0,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$ - na krawędzi swobodnie podpartej,

c) $M_n = 0,\ V_n = 0$ - na krawędzi swobodnej.

W warunkach tych n oznacza kierunek normalnej do krawędzi a V_n jest siłą zredukowaną wprowadzoną w 1850 r. przez Kirchhoffa [18].

Siła ta łączy wpływ momentu skręcającego M_{ns} oraz siły poprzecznej Q_n na brzegu swobodnym (Rys7.2b):

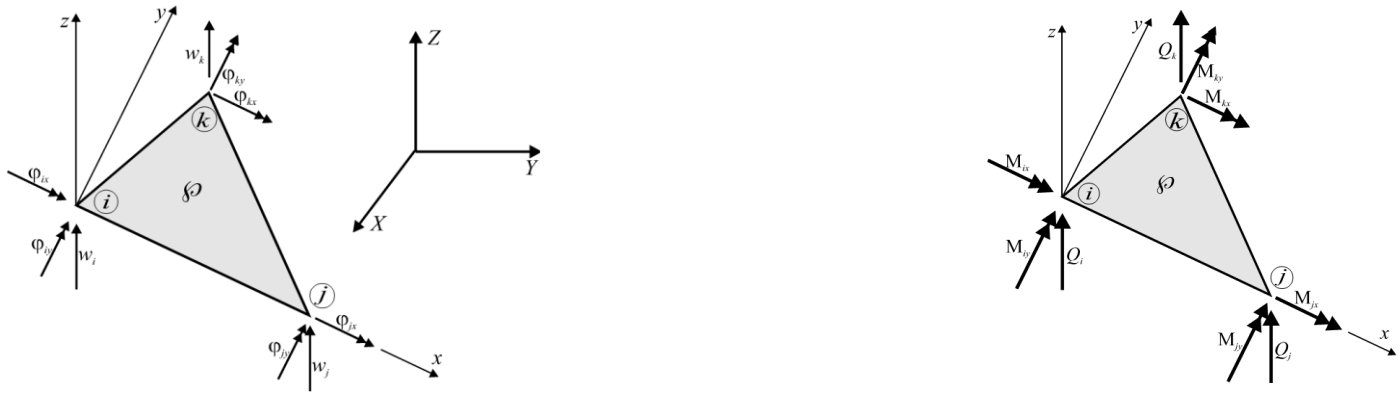
$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s^2}\right], \qquad (7.11)$$

gdzie n oznacza kierunek normalnej do brzegu, a s stycznej do brzegu płyty.

Ta modyfikacja warunków brzegowych okazała się niezbędna, gdyż równanie czwartego rzędu (7.10) nie może spełniać na brzegu trzech warunków, które wynikają z wymogów znikania naprężeń na swobodnym brzegu: $M_{ns} = 0,\ \ M_n = 0,\ \ Q_n = 0$.

7.2. TRÓJKĄTNY ELEMENT SKOŃCZONY PŁYTY CIENKIEJ

Pokażemy teraz sposób konstruowania macierzy sztywności elementu trójkątnego płyty cienkiej (Rys.7.3).



a) przemieszczenia węzłów

b) siły węzłowe

Rys.7.3

Wprowadzimy też kilka wygodnych oznaczeń:

- $w(x,y)$ - oznacza przemieszczenia powierzchni środkowej elementu;
- $\varphi_x = \dfrac{\partial w}{\partial y}$ - jest kątem obrotu elementu wokół osi x;
- $\varphi_y = -\dfrac{\partial w}{\partial x}$ - jest kątem obrotu elementu wokół osi y.

Węzeł elementu płytowego jak widać na Rys.7.3 ma trzy stopnie swobody. Zatem wektory przemieszczeń węzłowych elementu w układzie lokalnym zapisać można następująco:

$$\mathbf{u}'_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_{ix} \\ \varphi_{iy} \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}'_j = \begin{bmatrix} w_j \\ \varphi_{jx} \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}'_k = \begin{bmatrix} w_k \\ \varphi_{kx} \\ \varphi_{ky} \end{bmatrix}, \tag{7.12}$$

a wektor przemieszczeń elementu:

$$\mathbf{u}'^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_i \\ \mathbf{u}'_j \\ \mathbf{u}'_k \end{bmatrix}. \tag{7.13}$$

Siły węzłowe skierowane są analogicznie do przemieszczeń (Rys.7.3b), stąd analogiczne oznaczenia wektorów sił węzłowych:

$$\mathbf{f}'_i = \begin{bmatrix} Q_i \\ M_{ix} \\ M_{iy} \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}'_j = \begin{bmatrix} Q_j \\ M_{jx} \\ M_{jy} \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}'_k = \begin{bmatrix} Q_k \\ M_{kx} \\ M_{ky} \end{bmatrix}. \tag{7.14}$$

Wektor sił węzłowych elementu zapiszemy zatem następująco:

$$\mathbf{f}'^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_i \\ \mathbf{f}'_j \\ \mathbf{f}'_k \end{bmatrix}. \tag{7.15}$$

Powierzchnia odkształconego elementu aproksymować będziemy wielomianem trzeciego stopnia zaproponowanym przez J.LTochera w 1962 r.:

$$w(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8\left(x^2 y + xy^2\right) + a_9 y^3 = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}, \tag{7.16}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \\ x^3 \\ x^2 y + xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}.$$

Współczynniki a_1 ... a_9 funkcji $w(x,y)$ wyznaczymy z warunków brzegowych w węzłach i, j, k:

$$\begin{aligned} &w(x_i, y_i) = w_i,\ \varphi_x(x_i, y_i) = \varphi_{ix},\ \varphi_y(x_i, y_i) = \varphi_{iy}, \\ &w(x_j, y_j) = w_j,\ \varphi_x(x_j, y_j) = \varphi_{jx},\ \varphi_y(x_j, y_j) = \varphi_{jy}, \\ &w(x_k, y_k) = w_k,\ \varphi_x(x_k, y_k) = \varphi_{kx},\ \varphi_y(x_k, y_k) = \varphi_{ky}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Po wyliczeniu kątów obrotu otrzymamy:

$$\varphi_x = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8(x^2 + 2xy) + 3a_9 y^2 ,$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = -\left[a_2 + 2a_4 x + a_5 y + 3a_7 x^2 + a_8(2xy + y^2)\right]. \tag{7.18}$$

Wstawimy teraz równania (7.16) i (7.18) do warunków brzegowych (7.17) otrzymując:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{a} = \mathbf{u}'^{e} , \tag{7.19}$$

gdzie **M** jest macierzą kwadratową zależną od współrzędnych węzłów elementu.

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & 0 & x_j^2 & 0 & 0 & x_j^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_j & 0 & 0 & x_j^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_j & 0 & 0 & -3x_j^2 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 & x_k^3 & x_k^2 y_k + x_k y_k^2 & y_k^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_k & 2y_k & 0 & x_k^2 + 2x_k y_k & 3y_k^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_k & -y_k & 0 & -3x_k^2 & -2x_k y_k - y_k^2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} w_i \\ \varphi_{ix} \\ \varphi_{iy} \\ w_j \\ \varphi_{jx} \\ \varphi_{jy} \\ w_k \\ \varphi_{kx} \\ \varphi_{ky} \end{array} \tag{7.20}$$

Rozwiązanie równania (7.19) przedstawić można następująco:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{u}'^{e} , \tag{7.21}$$

gdzie $\mathbf{M}^{-1}$ jest macierzą odwrotną do **M**. Znalezienie macierzy $\mathbf{M}^{-1}$ jest możliwe wtedy, gdy $\det \mathbf{M} \neq 0$ (por. dodatek nr 1), co nie zawsze ma miejsce w naszym zadaniu, gdyż

$$\det \mathbf{M} = x_j^5 y_k^5 \left(2x_k + y_k - x_j\right) \tag{7.22}$$

Oznacza to, że w przypadkach, gdy wierzchołek k elementu znajduje się na prostej o równaniu $y = x_j - 2x$, to macierz **M** staje się osobliwa.

Problem rozwiązuje się wówczas przez zmianę lokalnego układu współrzędnych.

Obliczymy teraz wektor odkształcenia określony równaniem (7.3)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z\,\partial w(x,y) = -z\,\partial \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}'^{e} = -z \mathbf{B}^{*} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}'^{e}, \tag{7.23}$$

gdzie $\mathbf{B}^{*} = \partial\, \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}$ jest macierzą prostokątną, której składowe są równe:

$$\mathbf{B}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x+y) & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.24}$$

Porównując równanie (7.23) z definicją macierzy geometrycznej $\mathbf{B}^{e}$, otrzymamy

$$\mathbf{B}^{e} = -z\,\mathbf{B}^{*} \mathbf{M}^{-1}. \tag{7.25}$$

Możemy zatem wykorzystać definicję macierzy sztywności zawartą w równaniu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'^{e} &= \int_{\mathscr{V}} \left(\mathbf{B}^{e}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\, \mathbf{B}^{e} d\mathscr{V} = \left(\mathbf{M}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int_{\mathscr{A}} \left(\mathbf{B}^{*}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\, \mathbf{B}^{*} d\mathscr{A}\, \mathbf{M}^{-1} = \\ &= \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \left(\mathbf{M}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \int_{\mathscr{A}} \left(\mathbf{B}^{*}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\, \mathbf{B}^{*} d\mathscr{A}\, \mathbf{M}^{-1}. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Po oznaczeniu całki występującej w tym równaniu przez $\mathbf{K}^{*}$ i wykorzystaniu definicji sztywności płytowej mamy:

$$\mathbf{K}'^{e} = D\left(\mathbf{M}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{*} \mathbf{M}^{-1}. \tag{7.27}$$

Po wykonaniu mnożeń macierzowych pod znakiem całki w równaniu (7.26) mamy

$$\mathbf{K}^* = \frac{E}{1-\nu^2}\int_{\mathscr{A}} \mathbf{S}\, d\mathscr{A}\ , \tag{7.28}$$

gdzie

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4\nu & 12x & 4(y+x\nu) & 12y\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 & 0 & 4(x+y)(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\nu & 0 & 4 & 12x\nu & 4(y\nu+x) & 12y \\ 0 & 0 & 0 & 12x & 0 & 12x\nu & 36x^2 & 12\left(xy+x^2\nu\right) & 36xy\nu \\ 0 & 0 & 0 & 4(y+x\nu) & 4(x+y)(1-\nu) & 4(y\nu+x) & 12\left(xy+x^2\nu\right) & \begin{matrix} 4\left(3y^2+4xy+3x^2\right)+ \\ -8\nu\left(x^2+xy+y^2\right) \end{matrix} & 12\left(y^2\nu+xy\right) \\ 0 & 0 & 0 & 12y\nu & 0 & 12y & 36xy\nu & 12\left(y^2\nu+xy\right) & 36y^2 \end{bmatrix}.$$

Przy obliczeniu całek funkcji występujących w równaniu (7.28) pomocne okażą się związki:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathscr{A}} d\mathscr{A} = \frac{1}{2}x_j y_k\,, \\ &\int_{\mathscr{A}} x\, d\mathscr{A} = \frac{1}{6}x_j y_k\left(x_j + x_k\right), \\ &\int_{\mathscr{A}} y\, d\mathscr{A} = \frac{1}{6}x_j y_k^2\,, \\ &\int_{\mathscr{A}} x^2 d\mathscr{A} = \frac{1}{12}x_j y_k\left(x_j^2 + x_j x_k + x_k^2\right), \end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\int_{\mathscr{A}} xy d\mathscr{A} = \frac{1}{24} x_j y_k^2 \left(x_j + 2x_k \right),$$

$$\int_{\mathscr{A}} y^2 d\mathscr{A} = \frac{1}{12} x_j y_k^2 .$$

Macierz (7.26) określona jest w lokalnym układzie współrzędnych. Musimy zatem transformować ją do układu globalnego zgodnie z zależnością:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}'^e \left(\mathbf{R}^e \right)^{\mathrm{T}} .$$

Macierz obrotu elementu $\mathbf{R}^e$ jest równa:

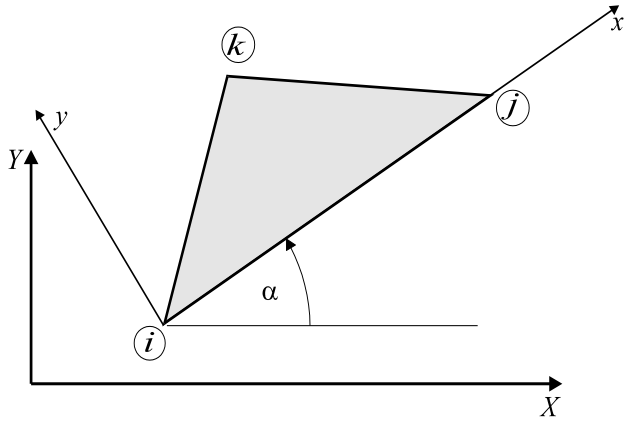
$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & & \\ & \mathbf{R}_j & \\ & & \mathbf{R}_k \end{bmatrix}, \tag{7.30}$$

gdzie $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_j$, $\mathbf{R}_k$ są macierzami obrotu węzłów. Gdy we wszystkich węzłach używamy tego samego układu współrzędnych (tak było w tym rozdziale) można użyć tylko jednej macierzy obrotu: $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_i$,

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}, \tag{7.31}$$

gdzie $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$, α jest kątem między osiami X układu globalnego i osią x układu lokalnego (Rys.7.4).

Wartość 1 w pierwszym wierszu macierzy $\mathbf{R}_i$ jest konsekwencją faktu, że osie Z i z są równoległe.



Rys.7.4

Element trójkątny, którego macierz sztywności otrzymaliśmy, odznacza się pewną wygodną cechą, mianowicie bardzo łatwo dyskretyzuje się przy jego pomocy płyty o dowolnych kształtach. Element ten w połączeniu z elementem trójkątnym tarczy może być użyty jako element powłoki (por. [12]).

Element o innych kształtach (prostokątne lub dowolne czworokąty) omówione są w książkach Bathego [1], Zienkiewicza [19],[20], Rao [13], i Rakowskiego [12].