Macierz sztywności czworokątnego elementu płytowego

ORIGIN := 1

			1					
		x		y				
	x^2		$x\,y$		y^2			
x^3		$x^2\,y$		$x\,y^2$		y^3		
x^4		$x^3\,y$		$x^2\,y^2$		$x\,y^3$		y^3

ai - wektor współczynników funkcji kształtu "i-tego" stopnia swobody ---------->

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \\ a_{i6} \\ a_{i7} \\ a_{i8} \\ a_{i9} \\ a_{i10} \\ a_{i11} \\ a_{i12} \end{bmatrix}$$

$\eta(x,y) := \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & x\cdot y & y^2 & x^3 & x^2\cdot y & x\cdot y^2 & y^3 & x^3\cdot y & x\cdot y^3 \end{bmatrix}$ *- macierz funkcji bazowych ugięcia elementu prostokątnego*

$N_i(x,y) = \eta(x,y)\cdot a_i$ *- funkcja kształtu "i-tego" stopnia swobody*

$\Phi y = (-1)\cdot\left(\frac{d}{dx}\eta(x,y)\right)$ $\quad \Phi y(x,y) := -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\cdot x & y & 0 & 3\cdot x^2 & 2\cdot x\cdot y & y^2 & 0 & 3\cdot x^2\cdot y & y^3 \end{bmatrix}$ *- macierz pochodnych funkcji bazowych*

$\Phi x = \frac{d}{dy}\eta(x,y)$ $\quad \Phi x(x,y) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2\cdot y & 0 & x^2 & 2\cdot x\cdot y & 3\cdot y^2 & x^3 & 3\cdot x\cdot y^2 \end{bmatrix}$ *- macierz pochodnych funkcji bazowych*

$Kx = \frac{d^2}{dx^2}\eta(x,y)$ $\quad Kx(x,y) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6\cdot x & 2\cdot y & 0 & 0 & 6\cdot x\cdot y & 0 \end{bmatrix}$ *- macierz funkcji bazowych krzywizn*

$Ky = \frac{d^2}{dy^2}\eta(x,y)$ $\quad Ky(x,y) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2\cdot x & 6\cdot y & 0 & 6\cdot x\cdot y \end{bmatrix}$ *- macierz funkcji bazowych krzywizn*

$Kxy = \frac{d}{dxy}\eta(x,y)$ $\quad Kxy(x,y) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\cdot x & 2\cdot y & 0 & 3\cdot x^2 & 3\cdot y^2 \end{bmatrix}$ *- macierz funkcji bazowych krzywizn*

Wielomian aproksymacyjny funkcji ugięcia płyty

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{12} N_i(x,y) = \sum_{i=1}^{12} \eta(x,y)\cdot a_i$$

$\Delta x := 1 \quad \Delta y := 1$ *- wymiary boków prostkątnego elementu płytowego*

Jednostkowe przemieszczenia węzła "1"

$$w1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi x1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi y1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Położenie i numery punktów węzłowych

```
( 4 )---( 3 )
  |        |
( 1 )---( 2 )
```

Wektory współrzędnych punktów węzłowych

$$X := \Delta x\cdot\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \qquad Y := \Delta y\cdot\begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Macierz współrzędnych punktów węzłowych wstawionych do wielomianu N(x,y)

$i := 1..4$ $\quad A_i := \eta(X_i, Y_i)$ $\quad B_i := \Phi x(X_i, Y_i)$ $\quad C_i := \Phi y(X_i, Y_i)$

$M := \mathrm{stack}(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, A_4, B_4, C_4)$ $\quad \|M\| = -1$ $\quad P := M^{-1}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & -0.125 & -0.125 & -0.125 & -0.125 & 0.063 & 0.063 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & -1 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & -0.125 & -0.375 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0 & 0.375 & 0.125 \\ 1 & 0.5 & -0.5 & 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.125 & -0.125 & 0.125 & -0.125 & -0.063 & -0.063 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & -1 & 0 & 0.25 & -0.5 & 0.75 & 0.125 & 0.375 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0.5 & 0 & -0.75 & 0.5 & -0.25 & 0 & 0.375 & 0.125 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.063 & 0.063 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 0.125 & 0.375 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -0.5 & 0 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0 & -0.375 & -0.125 \\ 1 & -0.5 & 0.5 & 0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.125 & 0.125 & -0.125 & 0.125 & -0.063 & -0.063 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0.25 & -0.5 & 0.75 & -0.125 & -0.375 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & -0.75 & 0.5 & -0.25 & 0 & -0.375 & -0.125 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.063 & -0.063 & 0.25 & 0.063 & 0.063 & 0.25 & -0.063 & 0.063 & 0.25 & -0.063 & -0.063 \\ -0.75 & -0.125 & 0.125 & 0.75 & 0.125 & 0.125 & 0.75 & -0.125 & 0.125 & -0.75 & 0.125 & 0.125 \\ -0.75 & -0.125 & 0.125 & -0.75 & -0.125 & -0.125 & 0.75 & -0.125 & 0.125 & 0.75 & -0.125 & -0.125 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 2 & 0.25 & -0.25 & -2 & -0.25 & -0.25 & 2 & -0.25 & 0.25 & -2 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 1 & 0 & -0.5 & -1 & 0 & -0.5 & -1 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & -1 & 0.5 & 0 & -1 & 0.5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i := 1..12$ $\quad w_i := Wektor_\delta(i)$

$M \cdot a_i = w_i$ -------> $a_i = M^{-1} \cdot w_i$ -------> $a_i := P \cdot w_i$

$$a^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ -0.8 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ 0.3 \\ -0.3 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ -0.3 \\ 0 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \\ -0.8 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ -0.3 \\ -0.3 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ -0.3 \\ -0.3 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ -0.3 \\ 0.3 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ -0.3 \\ 0.3 \\ 0 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ 0.8 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

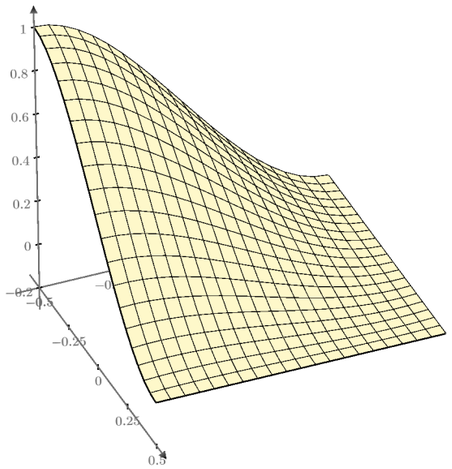
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$$Wektor(5) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Wektor_\delta(n) := \left\| \begin{array}{l} a_{12} \leftarrow 0 \\ a_n \leftarrow 1 \\ a \end{array} \right.$$

Wykresy funkcji kształtu

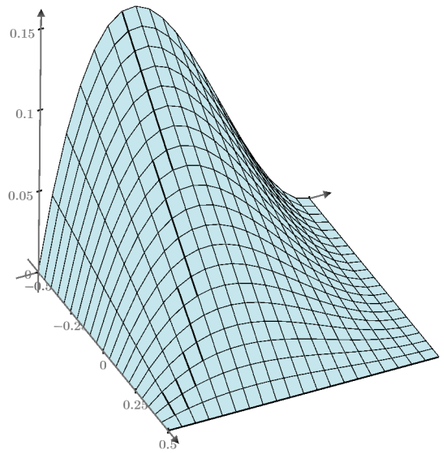
$W1(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_1$ *- funkcja kształtu ugięcia węzła "1"*



CreateMesh$(W1, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$\Phi x1(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_2$

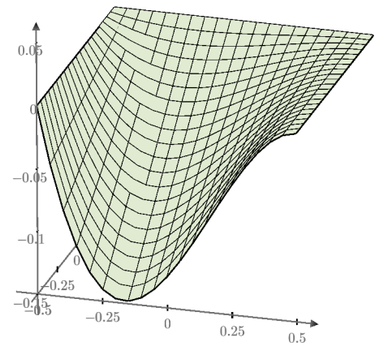
- funkcja kształtu obrotu φx w węźle "1"



CreateMesh$(\Phi x1, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$\Phi y1(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_3$

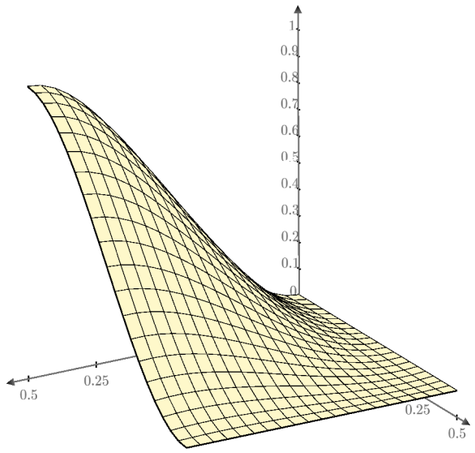
- funkcja kształtu obrotu φy w węźle "1"



CreateMesh$(\Phi y1, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$W2(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_4$

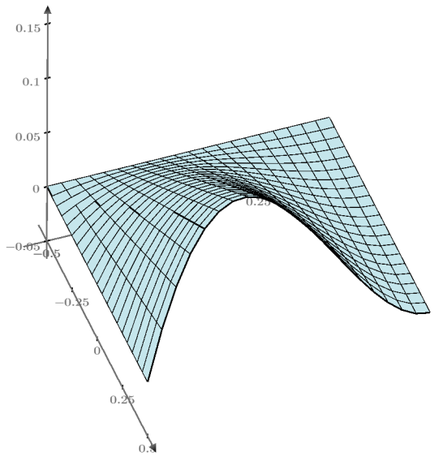
- funkcja kształtu ugięcia w węźle "2"



CreateMesh$(W2, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$\Phi x2(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_5$

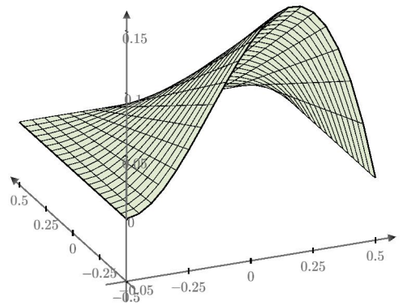
- funkcja kształtu obrotu φx w węźle "2"



CreateMesh$(\Phi x2, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$\Phi y2(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_6$

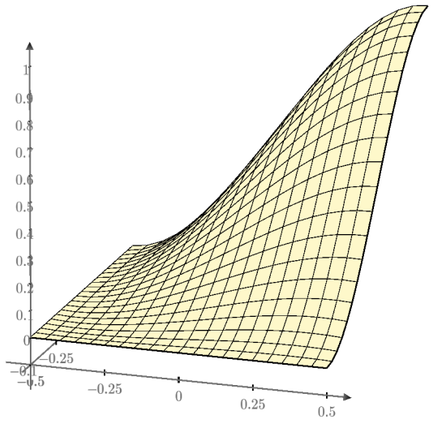
- funkcja kształtu obrotu φy w węźle "2"



CreateMesh$(\Phi y2, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$W3(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_7$

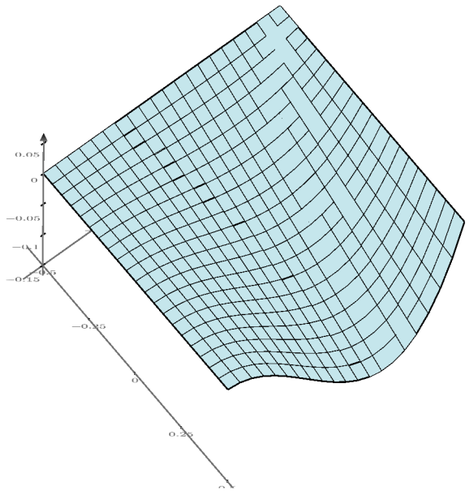
- funkcja kształtu ugięcia węzła "3"



CreateMesh$(W3, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$\Phi x3(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_8$

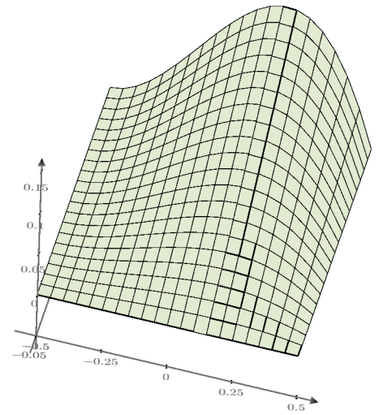
- funkcja kształtu obrotu φx w węźle "3"



CreateMesh$(\Phi x3, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$\Phi y3(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_9$

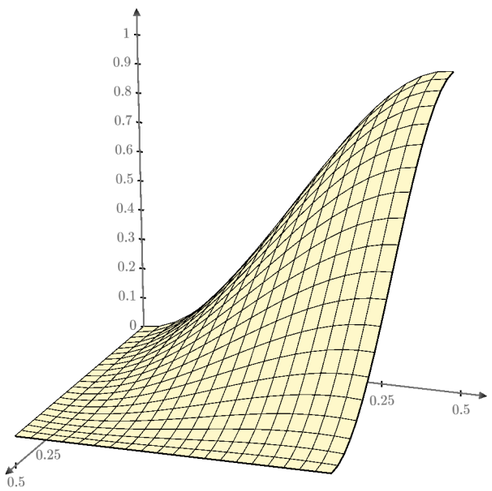
- funkcja kształtu obrotu φy w węźle "3"



CreateMesh$(\Phi y3, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$W4(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_{10}$

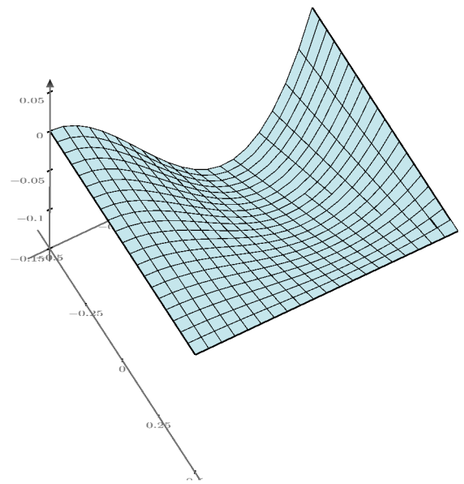
- funkcja kształtu ugięcia węzła "4"



CreateMesh$(W4, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$\Phi x4(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_{11}$

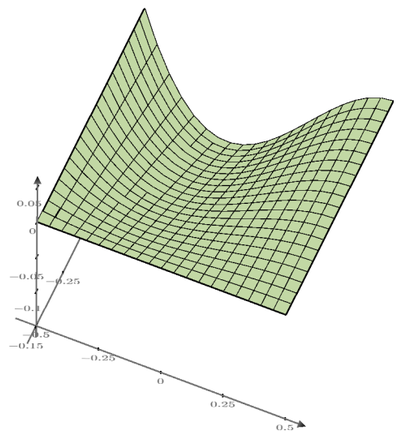
- funkcja kształtu obrotu φx w węźle "4"



CreateMesh$(\Phi x4, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$\Phi y4(x,y) := \eta(x,y) \cdot a_{12}$

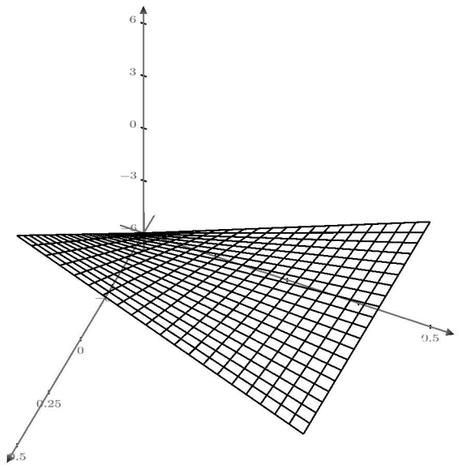
- funkcja kształtu obrotu φy w węźle "4"



CreateMesh$(\Phi y4, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Kx1(x,y) := Kx(x,y) \cdot a_1$

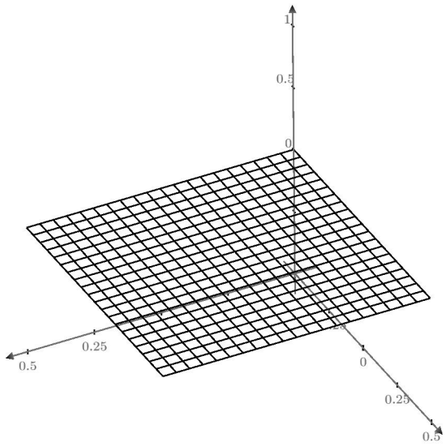
- funkcja krzywizny Kx wywołanej przemieszczeniem węzła "1"



CreateMesh$(Kx1, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Kx2(x,y) := Kx(x,y) \cdot a_2$

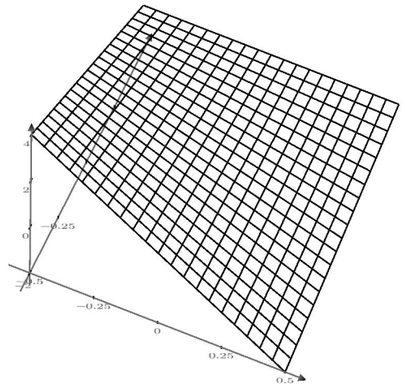
- funkcja krzywizny Kx wywołanej obrotem φx węzła "1"



CreateMesh$(Kx2, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Kx3(x,y) := Kx(x,y) \cdot a_3$

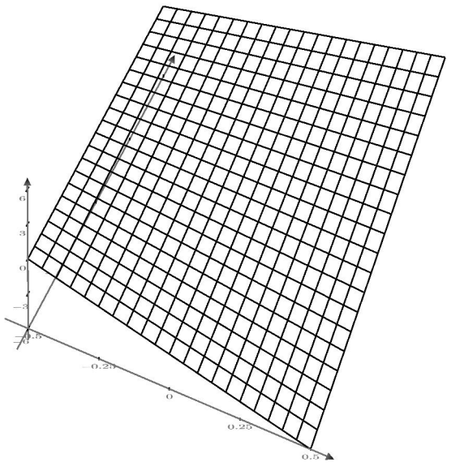
- funkcja krzywizny Kx wywołanej obrotem φy węzła "1"



CreateMesh$(Kx3, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Ky4(x,y) := Ky(x,y) \cdot a_4$

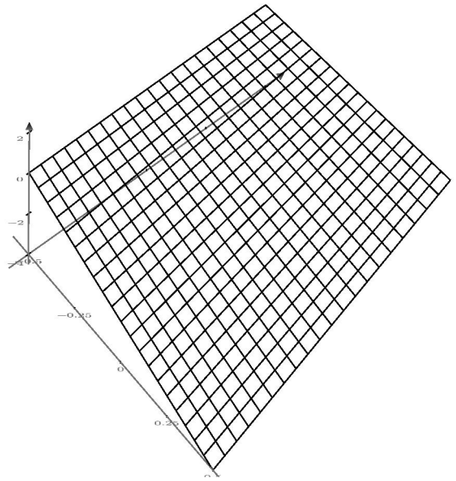
- funkcja krzywizny Ky wywołanej przemieszczeniem węzła "2"



CreateMesh$(Ky4, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Ky5(x,y) := Ky(x,y) \cdot a_5$

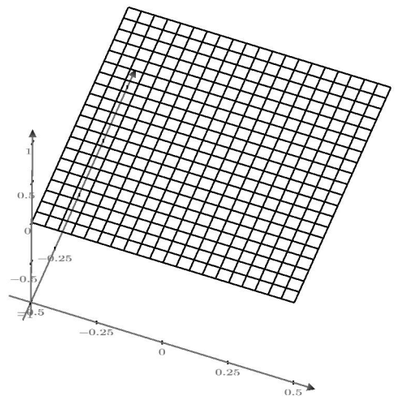
- funkcja krzywizny Ky wywołanej obrotem φx węzła "2"



CreateMesh$(Ky5, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Ky6(x,y) := Ky(x,y) \cdot a_6$

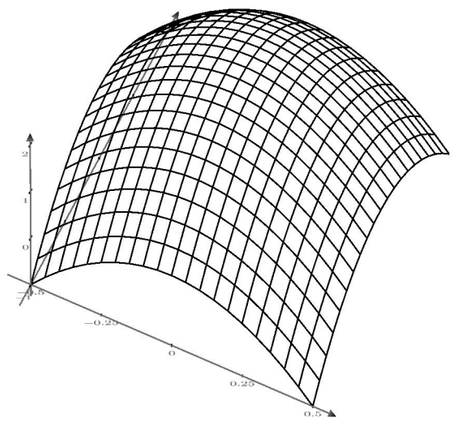
- funkcja krzywizny Ky wywołanej obrotem φy węzła "2"



CreateMesh$(Ky6, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Kxy7(x,y) := Kxy(x,y) \cdot a_7$

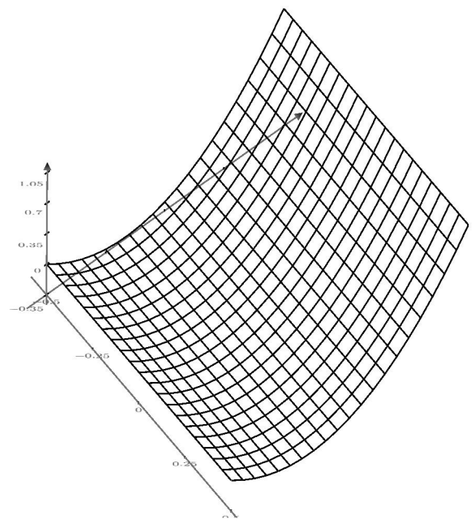
- funkcja krzywizny Kxy wywołanej przemieszczeniem węzła "3"



CreateMesh$(Kxy7, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Kxy8(x,y) := Kxy(x,y) \cdot a_8$

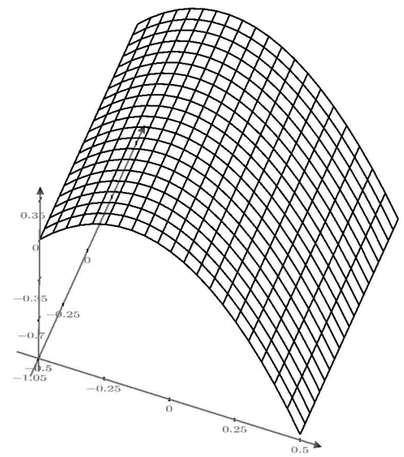
- funkcja krzywizny Kxy wywołanej obrotem φx węzła "3"



CreateMesh$(Kxy8, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

$Kxy9(x,y) := Kxy(x,y) \cdot a_9$

- funkcja krzywizny Kxy wywołanej obrotem φy węzła "3"



CreateMesh$(Kxy9, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5, 21)$

Macierz krzywizn elementu

$$\kappa = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} w(x,y) \\ \frac{d^2}{dy^2} w(x,y) \\ 2 \cdot \frac{d}{dxdy} w(x,y) \end{bmatrix} = B \cdot w^e$$

Macierz stałych sprężystych PSN

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = D0 \cdot D1$$

Sztywność zginania płyty

$$D0 = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \qquad D1 = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$B(x,y) = \begin{bmatrix} Kx(x,y) \\ Ky(x,y) \\ Kxy(x,y) \end{bmatrix}$$

$$B(x,y) := \text{stack}(Kx(x,y), Ky(x,y), Kxy(x,y))$$

$$B(0.5, 0.5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Dane materiałowe i geometryczne elementu płyty

$E := 20 \cdot GPa \qquad \nu := 0.2 \qquad h := 7 \cdot cm \qquad L := 20 \cdot cm$

$$D0 := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)} = 595.5\ kN \cdot m \qquad D1 := \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu pyty

$$K = D0 \cdot P^{\mathrm{T}} \cdot \left(\int k(x,y)\,\mathrm{d}A\right) \cdot P \qquad K = D0 \cdot P^{\mathrm{T}} \cdot K1 \cdot P \qquad K1 = \int k(x,y)\,\mathrm{d}A \qquad k(x,y) := B(x,y)^{\mathrm{T}} \cdot D1 \cdot B(x,y)$$

$$k(0,0) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$k(0.5,0.5) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0.8 & 6 & 2 & 0.4 & 1.2 & 3 & 0.6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 4 & 1.2 & 0.4 & 2 & 6 & 0.6 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1.2 & 9 & 3 & 0.6 & 1.8 & 4.5 & 0.9 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0.4 & 0.4 & 3 & 1.4 & 0.6 & 0.6 & 1.8 & 0.6 \\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 2 & 0.6 & 0.6 & 1.4 & 3 & 0.6 & 1.8 \\
0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 6 & 1.8 & 0.6 & 3 & 9 & 0.9 & 4.5 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0.3 & 0.6 & 4.5 & 1.8 & 0.6 & 0.9 & 2.5 & 0.7 \\
0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 3 & 0.9 & 0.6 & 1.8 & 4.5 & 0.7 & 2.5
\end{bmatrix}$$

$$k(-0.5,-0.5) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0.8 & -6 & -2 & -0.4 & -1.2 & 3 & 0.6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & -0.4 & -0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 4 & -1.2 & -0.4 & -2 & -6 & 0.6 & 3 \\
0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -1.2 & 9 & 3 & 0.6 & 1.8 & -4.5 & -0.9 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -0.4 & -0.4 & 3 & 1.4 & 0.6 & 0.6 & -1.8 & -0.6 \\
0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.4 & -2 & 0.6 & 0.6 & 1.4 & 3 & -0.6 & -1.8 \\
0 & 0 & 0 & -1.2 & 0 & -6 & 1.8 & 0.6 & 3 & 9 & -0.9 & -4.5 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0.3 & 0.6 & -4.5 & -1.8 & -0.6 & -0.9 & 2.5 & 0.7 \\
0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 3 & -0.9 & -0.6 & -1.8 & -4.5 & 0.7 & 2.5
\end{bmatrix}$$

$$k(-0.5,0.5) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0.8 & -6 & 2 & -0.4 & 1.2 & -3 & -0.6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 4 & -1.2 & 0.4 & -2 & 6 & -0.6 & -3 \\
0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -1.2 & 9 & -3 & 0.6 & -1.8 & 4.5 & 0.9 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -0.4 & 0.4 & -3 & 1.4 & -0.6 & 0.6 & -1.8 & -0.6 \\
0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & -2 & 0.6 & -0.6 & 1.4 & -3 & 0.6 & 1.8 \\
0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 6 & -1.8 & 0.6 & -3 & 9 & -0.9 & -4.5 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 0.3 & -0.6 & 4.5 & -1.8 & 0.6 & -0.9 & 2.5 & 0.7 \\
0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.3 & -3 & 0.9 & -0.6 & 1.8 & -4.5 & 0.7 & 2.5
\end{bmatrix}$$

$$k(0.5,-0.5)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0.8 & 6 & -2 & 0.4 & -1.2 & -3 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 & -0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 4 & 1.2 & -0.4 & 2 & -6 & -0.6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1.2 & 9 & -3 & 0.6 & -1.8 & -4.5 & -0.9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0.4 & -0.4 & -3 & 1.4 & -0.6 & 0.6 & 1.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.4 & 2 & 0.6 & -0.6 & 1.4 & -3 & -0.6 & -1.8 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 & 0 & -6 & -1.8 & 0.6 & -3 & 9 & 0.9 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0.3 & -0.6 & -4.5 & 1.8 & -0.6 & 0.9 & 2.5 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.3 & -3 & -0.9 & 0.6 & -1.8 & 4.5 & 0.7 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$B(x,y):=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6\cdot x & 2\cdot y & 0 & 0 & 6\cdot x\cdot y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2\cdot x & 6\cdot y & 0 & 6\cdot x\cdot y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\cdot x & 2\cdot y & 0 & 3\cdot x^2 & 3\cdot y^2 \end{bmatrix}$$

$$k(x,y):=B(x,y)^{\mathrm{T}}\cdot D1\cdot B(x,y)$$

$$k(0.5,-0.5)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0.8 & 6 & -2 & 0.4 & -1.2 & -3 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 & -0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 4 & 1.2 & -0.4 & 2 & -6 & -0.6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1.2 & 9 & -3 & 0.6 & -1.8 & -4.5 & -0.9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0.4 & -0.4 & -3 & 1.4 & -0.6 & 0.6 & 1.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.4 & 2 & 0.6 & -0.6 & 1.4 & -3 & -0.6 & -1.8 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 & 0 & -6 & -1.8 & 0.6 & -3 & 9 & 0.9 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0.3 & -0.6 & -4.5 & 1.8 & -0.6 & 0.9 & 2.5 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.3 & -3 & -0.9 & 0.6 & -1.8 & 4.5 & 0.7 & 2.5 \end{bmatrix}$$