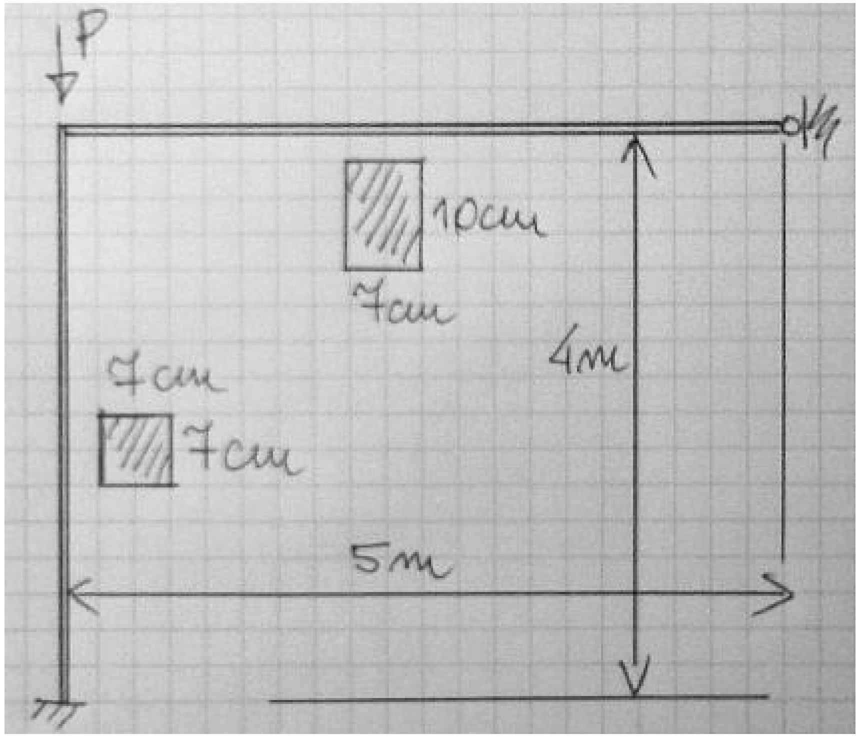
Stateczność ramy drewnianej o 2 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłą skupioną

$ORIGIN := 1$ - *Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*



$E := 10 \cdot GPa$ - *Moduł Younga drewna*

Wymiary przekrojów

$a_1 := 7 \cdot cm$ $b_1 := 7 \cdot cm$

$a_2 := 7 \cdot cm$ $b_2 := 10 \cdot cm$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 3$ - *Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 2$ - *Liczba elementów*

$Lw := 3$ - *Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ - *Liczba równań*

$Ko_{Lr, Lr} := 0 \frac{kN}{m}$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

$l := 1 \cdot m$ - *pomocnicza stała długość*

Ponieważ MathCad nie pozwala przechowywać w jednej macierzy składowych wyrażonych w różnych jednostkach to mamy do wyboru 2 mozliwości:
- nie zapisywać jednostek w których wyrażone są te składowe
- przekształcić tak te składowe, aby były jednolite (wyrażone w jednakowych jednostkach miary)

Wybieram 2 sposób i przekształcam niewiadome występujące w macierzach następująco
(l *- oznacza tu dowolną stałą o wymiarze długości) :*

$u_{zi} = l \cdot \varphi_i$ $u_{zj} = l \cdot \varphi_j$ $M_i = l \cdot T_i$ $M_j = l \cdot T_j$ $\lambda^2 = \frac{L^2 \cdot A}{J}$ $\eta = \frac{L}{l}$

Wszystkie poszukiwane przemieszczenia są więc przesunięciami, a węzłowe wielkości statyczne - siłami. Macierz sztywności zmieni sie więc do postaci, którą MathCad akceptuje:

$$\begin{pmatrix} Fxi \\ Fyi \\ Ti \\ Fxj \\ Fjy \\ Tj \end{pmatrix} = \left[\frac{E \cdot J}{L^3} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\eta & 0 & -12 & 6\eta \\ 0 & 6\eta & 4\eta^2 & 0 & -6\eta & 2\eta^2 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6\eta & 0 & 12 & -6\eta \\ 0 & 6\eta & 2\eta^2 & 0 & -6\eta & 4\eta^2 \end{pmatrix} + \frac{S}{L} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1\eta & 0 & -1.2 & 0.1\eta \\ 0 & 0.1\eta & \frac{2}{15}\eta^2 & 0 & -0.1\eta & \frac{-1}{30}\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & -0.1\eta & 0 & 1.2 & -0.1\eta \\ 0 & 0.1\eta & \frac{-1}{30}\eta^2 & 0 & -0.1\eta & \frac{2}{15}\eta^2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} uxi \\ uyi \\ uzi \\ uxj \\ uyj \\ uzj \end{pmatrix}$$

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności

```
LBM(A,B,w,k) := | for i ∈ 0..rows(B)−1
                |   for j ∈ 0..cols(B)−1
                |     A[w+i,k+j] ← B[1+i,1+j]
                | A
```

Współrzędne węzłów ramy

$$X := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m} \qquad Y := \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m}$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad Wk := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Siły wewnętrzne w elementach

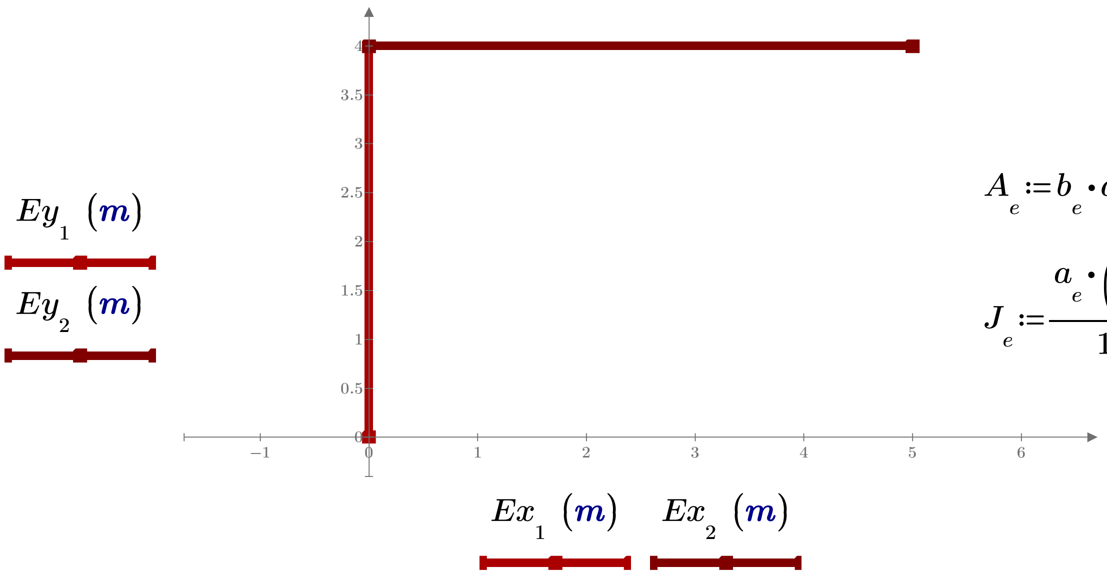
$$S := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{kN}$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach ramy*

Rysunek elementów kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{\left(Wp_e\right)} \\ X_{\left(Wk_e\right)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{\left(Wp_e\right)} \\ Y_{\left(Wk_e\right)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów ramy



$A_e := b_e \cdot a_e$ *- Pole powierzchni przekroju elementów*

$$J_e := \frac{a_e \cdot \left(b_e\right)^3}{12}$$ *- Moment bezwładności przekrojów*

Wielkości pomocnicze do wyliczania składowych macierzy sztywności elementów ramy

$$Lx_e := X_{\left(Wk_e\right)} - X_{\left(Wp_e\right)} \qquad Ly_e := Y_{\left(Wk_e\right)} - Y_{\left(Wp_e\right)} \qquad L_e := \sqrt{\left(Lx_e\right)^2 + \left(Ly_e\right)^2}$$

$$Lx = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 5.000 \end{bmatrix} \mathbf{m} \qquad Ly = \begin{bmatrix} 4.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} \mathbf{m} \qquad L = \begin{bmatrix} 4.000 \\ 5.000 \end{bmatrix} \mathbf{m} \qquad A = \begin{bmatrix} 49.000 \\ 70.000 \end{bmatrix} \mathbf{cm}^2 \qquad J = \begin{bmatrix} 200.083 \\ 583.333 \end{bmatrix} \mathbf{cm}^4$$

$$\eta_e := \frac{L_e}{l} \qquad \lambda 2_e := \frac{\left(L_e\right)^2 \cdot A_e}{J_e} \qquad \mu_e := \frac{E \cdot J_e}{\left(L_e\right)^3} \qquad \kappa_e := \frac{S_e}{L_e}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 4.000 \\ 5.000 \end{bmatrix} \qquad \lambda 2 = \begin{bmatrix} 39183.673 \\ 30000.000 \end{bmatrix} \qquad \mu = \begin{bmatrix} 312.630 \\ 466.667 \end{bmatrix} \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}} \qquad \kappa = \begin{bmatrix} -250.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}$$

Bloki macierzy sztywności elementu ramowego w lokalnym układzie współrzednych

$$K11_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} \lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \cdot \eta_e \\ 0 & 6 \cdot \eta_e & 4 \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad K12_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} -\lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 \cdot \eta_e \\ 0 & -6 \cdot \eta_e & 2 \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad K22_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} \lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 \cdot \eta_e \\ 0 & -6 \cdot \eta_e & 4 \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu zapisana z użyciem bloków

$$K = \begin{bmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \end{bmatrix} \qquad K21 = K12^{\mathrm{T}}$$

Bloki macierzy geometrycznych elementu ramowego w lokalnym układzie współrzednych

$$G11_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1 \cdot \eta_e \\ 0 & 0.1 \cdot \eta_e & \frac{2}{15} \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad G12_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 0.1 \cdot \eta_e \\ 0 & -0.1 \cdot \eta_e & \frac{-1}{30} \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad G22_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -0.1 \cdot \eta_e \\ 0 & -0.1 \cdot \eta_e & \frac{2}{15} \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix}$$

Macierz geometryczna elementu zapisana z użyciem bloków

$$G = \begin{bmatrix} G11 & G12 \\ G21 & G22 \end{bmatrix} \qquad G21 = G12^{\mathrm{T}}$$

Macierze obrotu do globalnego układu współrzednych

$$c_e := \frac{Lx_e}{L_e} \qquad s_e := \frac{Ly_e}{L_e}$$

$$R_e := \begin{bmatrix} c_e & -s_e & 0 \\ s_e & c_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacja macierzy sztywności i macierzy geometrycznych elementu 1 do globalnego układu współrzędnych.
Uwaga! macierzy elementu 2 można nie transformować bo kąt obrotu jest równy 0

$$K11_e := R_e \cdot K11_e \cdot R_e^{\mathrm{T}} \qquad K12_e := R_e \cdot K12_e \cdot R_e^{\mathrm{T}} \qquad K22_e := R_e \cdot K22_e \cdot R_e^{\mathrm{T}}$$

$$G11_e := R_e \cdot G11_e \cdot R_e^{\mathrm{T}} \qquad G12_e := R_e \cdot G12_e \cdot R_e^{\mathrm{T}} \qquad G22_e := R_e \cdot G22_e \cdot R_e^{\mathrm{T}}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 2 \qquad k_e := Lss \cdot Wk_e - 2$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (ne) i końcowych (ke)*

$$n = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad k = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$K := \sum_e \left(\left(\left(LBM\left(Ko, K11_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, K22_e, k_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, K12_e, n_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, K12_e^{\mathrm{T}}, k_e, n_e\right)\right)$$

$$G := \sum_e \left(\left(\left(LBM\left(Ko, G11_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, G22_e, k_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, G12_e, n_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, G12_e^{\mathrm{T}}, k_e, n_e\right)\right)$$

$$K=\begin{bmatrix} 3.8 & 0.0 & -7.5 & -3.8 & 0.0 & -7.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12250.0 & 0.0 & 0.0 & -12250.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -7.5 & 0.0 & 20.0 & 7.5 & 0.0 & 10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3.8 & 0.0 & 7.5 & 14003.8 & 0.0 & 7.5 & -14000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -12250.0 & 0.0 & 0.0 & 12255.6 & 14.0 & 0.0 & -5.6 & 14.0 \\ -7.5 & 0.0 & 10.0 & 7.5 & 14.0 & 66.7 & 0.0 & -14.0 & 23.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -14000.0 & 0.0 & 0.0 & 14000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -5.6 & -14.0 & 0.0 & 5.6 & -14.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 14.0 & 23.3 & 0.0 & -14.0 & 46.7 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$G=\begin{bmatrix} -0.3 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & -0.5 & -0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 & -0.1 & -0.3 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Globalna macierz sztywności **K** *i macierz geometryczna* **G** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$, $|\mathbf{G}|=0$

Kopiowanie Macierzy **K** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$Ko:=K$ $\qquad$ $Go:=G$

$\left\| K \cdot \frac{1 \cdot m}{kN} \right\| = 0.000$ $\qquad$ $\left\| G \cdot \frac{1 \cdot m}{kN} \right\| = 0.000$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Lwb := 5$ *- liczba warunków brzegowych*

$s := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$i := 1 .. Lr$ $j := 1 .. Lwb$

$Ko_{s_j, i} := 0$ $Go_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$Ko_{i, s_j} := 0$ $Go_{i, s_j} := 0$ *zerowanie kolumn*

$Ko_{s_j, s_j} := 1 \cdot \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$$Ko = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14003.8 & 0 & 7.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12255.6 & 14 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 7.5 & 14 & 66.7 & 0 & 0 & 23.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 23.3 & 0 & 0 & 46.7 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$Go = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & -0.533 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$\left\| Ko \cdot 1 \cdot \frac{m}{kN} \right\| = 4.404 \cdot 10^{11}$ *- wyznacznik macierzy* **K**o *jest zawsze większy od zera,* |**K**o|> 0

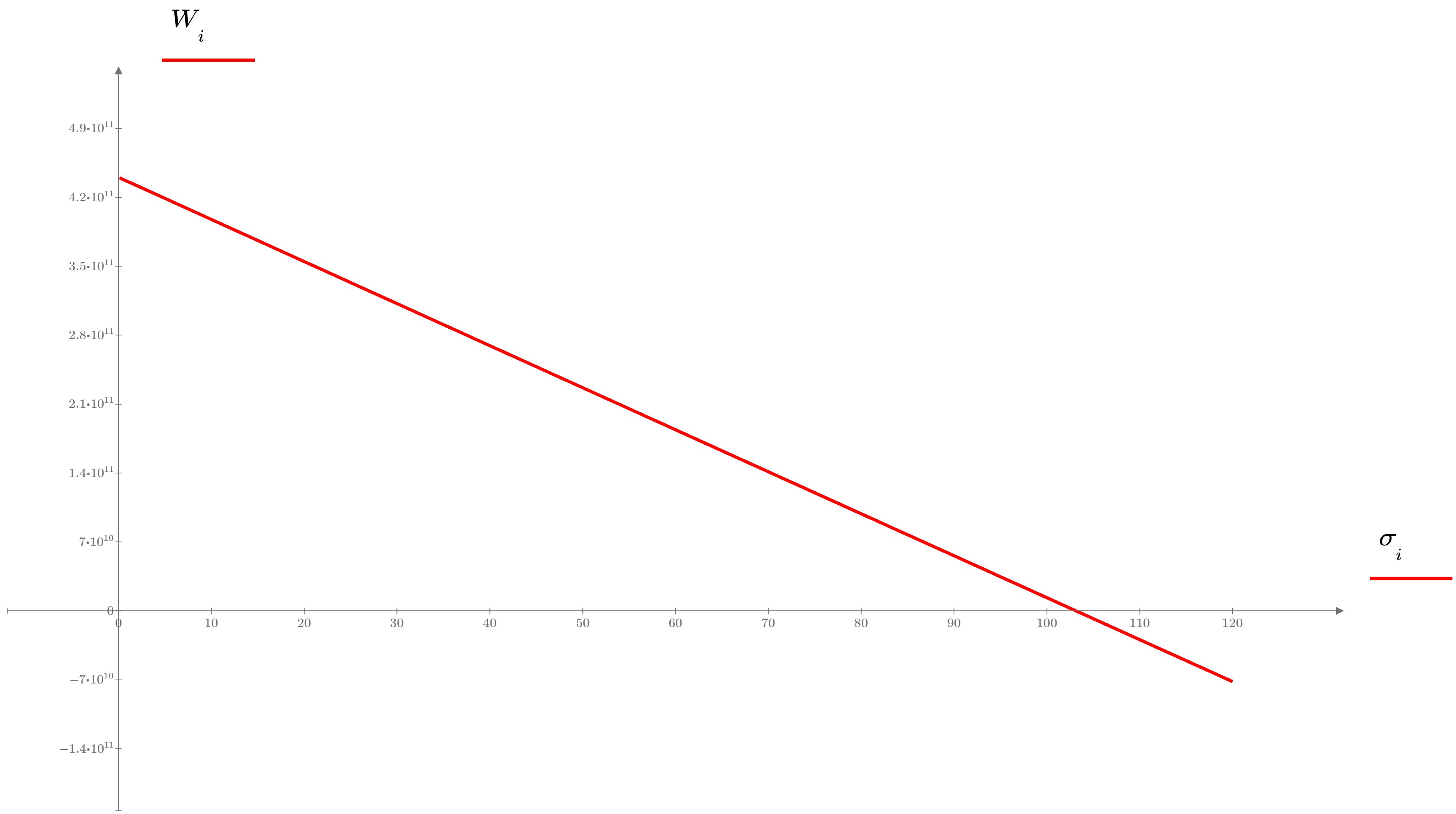
$\left\| Go \cdot 1 \cdot \frac{m}{kN} \right\| = 0.000$ *- wyznacznik macierzy* **G**o *może być równy zeru*

$|Ko + \sigma \cdot Go| = 0$ *- warunek niejednoznacznosci przemieszczeń, czyli mozliwość utraty stateczności*

$$KG(\sigma) := (Ko + \sigma \cdot Go) \cdot \frac{m}{kN}$$

$N := 1200$ $\quad i := 1 .. N$ $\quad \sigma_i := i \cdot 0.1$

$$W_i := \left\| KG(\sigma_i) \right\|$$



W_i
σ_i
4.9·10^11
4.2·10^11
3.5·10^11
2.8·10^11
2.1·10^11
1.4·10^11
7·10^10
0
−7·10^10
−1.4·10^11
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120

$N1 := 103000$ $\qquad$ $N2 := 103600$

$i := N1 .. N2$ $\qquad$ $\sigma_i := i \cdot 0.001$

$W_i := \left\| KG\left(\sigma_i\right) \right\|$

Siła krytyczna ma przybliżoną wartość Pkr=103.15 kN