Stateczność pręta swobodnie podpartego, podzielonego na 3 elementy

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

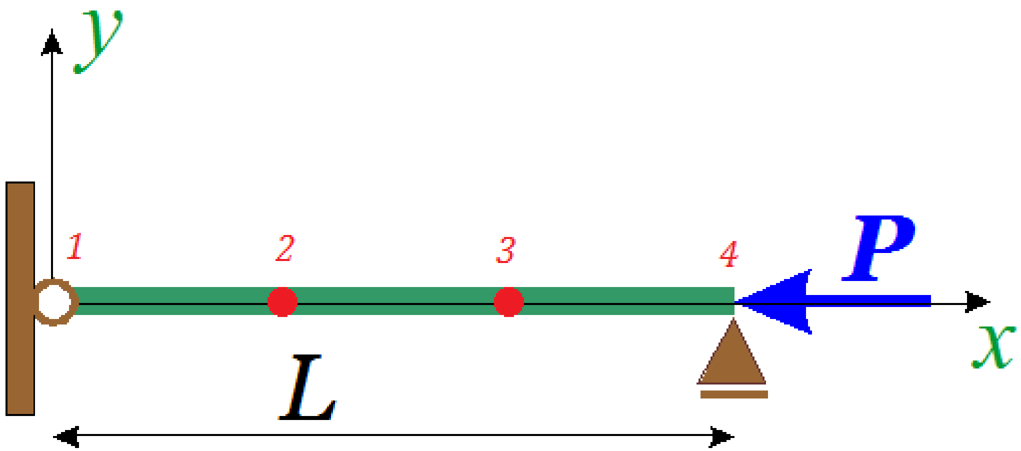
$E := 10 \cdot GPa$ *- Moduł Younga*

Wymiary przekrojów i długości elementów

$a_1 := 12 \cdot cm$ $\quad b_1 := 10 \cdot cm$ $\quad L1 := 2 \cdot m$

$a_2 := 12 \cdot cm$ $\quad b_2 := 10 \cdot cm$ $\quad L2 := 2 \cdot m$

$a_3 := 12 \cdot cm$ $\quad b_3 := 10 \cdot cm$ $\quad L3 := 2 \cdot m$



$L = L1 + L2 + L3$

$$a = \begin{bmatrix} 12.000 \\ 12.000 \\ 12.000 \end{bmatrix} cm \qquad b = \begin{bmatrix} 10.000 \\ 10.000 \\ 10.000 \end{bmatrix} cm$$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 3$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 3$ *- Liczba elementów*

$Lw := 4$ *- Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$Ko_{Lr,Lr} := 0\ \frac{kN}{m}$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

$l := 1 \cdot m$ *- pomocnicza stała długość*

Ponieważ MathCad nie pozwala przechowywać w jednej macierzy składowych wyrażonych w różnych jednostkach to mamy do wyboru 2 mozliwości:
- nie zapisywać jednostek w których wyrażone są te składowe
- przekształcić tak te składowe, aby były jednolite (wyrażone w jednakowych jednostkach miary)

Wybieram 2 sposób i przekształcam niewiadome występujące w macierzach następująco
(l - oznacza tu dowolną stałą o wymiarze długości) :

$u_{zi} = l \cdot \varphi_i$ $u_{zj} = l \cdot \varphi_j$ $M_i = l \cdot T_i$ $M_j = l \cdot T_j$ $\lambda^2 = \frac{L^2 \cdot A}{J}$ $\eta = \frac{L}{l}$

Wszystkie poszukiwane przemieszczenia są więc przesunięciami, a węzłowe wielkości statyczne - siłami. Macierz sztywności zmieni sie więc do postaci, którą MathCad akceptuje:

$$\begin{pmatrix} Fxi \\ Fyi \\ Ti \\ Fxj \\ Fjy \\ Tj \end{pmatrix} = \left[\frac{E \cdot J}{L^3} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\eta & 0 & -12 & 6\eta \\ 0 & 6\eta & 4\eta^2 & 0 & -6\eta & 2\eta^2 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6\eta & 0 & 12 & -6\eta \\ 0 & 6\eta & 2\eta^2 & 0 & -6\eta & 4\eta^2 \end{pmatrix} + \frac{S}{L} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1\eta & 0 & -1.2 & 0.1\eta \\ 0 & 0.1\eta & \frac{2}{15}\eta^2 & 0 & -0.1\eta & \frac{-1}{30}\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & -0.1\eta & 0 & 1.2 & -0.1\eta \\ 0 & 0.1\eta & \frac{-1}{30}\eta^2 & 0 & -0.1\eta & \frac{2}{15}\eta^2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} uxi \\ uyi \\ uzi \\ uxj \\ uyj \\ uzj \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sigma^2}{30} \begin{bmatrix} \frac{36}{l} & 3 & -\frac{36}{l} & 3 \\ 3 & 4l & -3 & -l \\ -\frac{36}{l} & -3 & \frac{36}{l} & -3 \\ 3 & -l & -3 & 4l \end{bmatrix}$$

$$\frac{\sigma^4}{12600} \begin{bmatrix} \frac{18}{l} & 9 & -\frac{18}{l} & 9 \\ 9 & 22l & -9 & 13l \\ -\frac{18}{l} & -9 & \frac{18}{l} & -9 \\ 9 & 13l & -9 & 22l \end{bmatrix}$$

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

```
LBM(A,B,w,k) := | for i ∈ 0..rows(B)−1
                |   | for j ∈ 0..cols(B)−1
                |   |   | A[w+i,k+j] ← B[1+i,1+j]
                | A
```

Współrzędne węzłów

$$X := \begin{bmatrix} 0 \\ L1 \\ L1+L2 \\ L1+L2+L3 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{m}$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad Wk := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Siły wewnętrzne w elementach

$$S := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{kN}$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach ramy*

$A_e := b_e \cdot a_e$ *- Pole powierzchni przekroju elementów*

$$A = \begin{bmatrix} 120.000 \\ 120.000 \\ 120.000 \end{bmatrix} \boldsymbol{cm}^2$$

$$J_e := \frac{a_e \cdot \left(b_e\right)^3}{12}$$

- Moment bezwładności przekroju elementów

$J_1 = 1000.000\ cm^4$

Wielkości pomocnicze do wyliczania składowych macierzy sztywności elementów ramy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)} \qquad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)} \qquad L_e := \sqrt{\left(Lx_e\right)^2 + \left(Ly_e\right)^2}$$

$$Lx = \begin{bmatrix} 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \end{bmatrix} \boldsymbol{m} \qquad Ly = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} \boldsymbol{m} \qquad L = \begin{bmatrix} 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \end{bmatrix} \boldsymbol{m} \qquad \frac{E \cdot J_1}{\left(L_1\right)^2} = 25\ kN$$

$$\eta_e := \frac{L_e}{l} \qquad \lambda 2_e := \frac{\left(L_e\right)^2 \cdot A_e}{J_e} \qquad \mu_e := \frac{E \cdot J_e}{\left(L_e\right)^3} \qquad \kappa_e := \frac{S_e}{L_e}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \end{bmatrix} \qquad \lambda 2 = \begin{bmatrix} 4800.000 \\ 4800.000 \\ 4800.000 \end{bmatrix} \qquad \mu = \begin{bmatrix} 12500.000 \\ 12500.000 \\ 12500.000 \end{bmatrix} \frac{N}{m} \qquad \kappa = \begin{bmatrix} -500.000 \\ -500.000 \\ -500.000 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$

Bloki macierzy sztywności elementu ramowego w lokalnym układzie współrzednych

$$K11_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} \lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \cdot \eta_e \\ 0 & 6 \cdot \eta_e & 4 \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad K12_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} -\lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 \cdot \eta_e \\ 0 & -6 \cdot \eta_e & 2 \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad K22_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} \lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 \cdot \eta_e \\ 0 & -6 \cdot \eta_e & 4 \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu zapisana z użyciem bloków

$$K = \begin{bmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \end{bmatrix} \qquad K21 = K12^{\mathrm{T}}$$

Bloki macierzy geometrycznych elementu ramowego w lokalnym układzie współrzednych

$$G11_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1 \cdot \eta_e \\ 0 & 0.1 \cdot \eta_e & \frac{2}{15} \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad G12_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 0.1 \cdot \eta_e \\ 0 & -0.1 \cdot \eta_e & \frac{-1}{30} \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad G22_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -0.1 \cdot \eta_e \\ 0 & -0.1 \cdot \eta_e & \frac{2}{15} \cdot \left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix}$$

Macierz geometryczna elementu zapisana z użyciem bloków

$$G = \begin{bmatrix} G11 & G12 \\ G21 & G22 \end{bmatrix} \qquad G21 = G12^{\mathrm{T}}$$

Macierze obrotu do globalnego układu współrzednych

$$c_e := \frac{Lx_e}{L_e} \qquad s_e := \frac{Ly_e}{L_e}$$

$$R_e := \begin{bmatrix} c_e & -s_e & 0 \\ s_e & c_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \ddots \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \ddots \end{bmatrix}$$

Transformacja macierzy sztywności i macierzy geometrycznych elementu 1 do globalnego układu współrzędnych.
Uwaga! macierzy elementu 2 można nie transformować bo kąt obrotu jest równy 0

$$K11_e := R_e \cdot K11_e \cdot R_e^{\mathrm{T}} \qquad K12_e := R_e \cdot K12_e \cdot R_e^{\mathrm{T}} \qquad K22_e := R_e \cdot K22_e \cdot R_e^{\mathrm{T}}$$

$$G11_e := R_e \cdot G11_e \cdot R_e^{\mathrm{T}} \qquad G12_e := R_e \cdot G12_e \cdot R_e^{\mathrm{T}} \qquad G22_e := R_e \cdot G22_e \cdot R_e^{\mathrm{T}}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 2$ $\quad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 2$ $\quad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (ne) i końcowych (ke)*

$$G11_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.267 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \qquad G12_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.067 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \qquad G22_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.267 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$n = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad k = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$K := \sum_e \left(\left(LBM\left(Ko, K11_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, K22_e, k_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, K12_e, n_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, {K12_e}^{T}, k_e, n_e\right)\right)$$

$$G := \sum_e \left(\left(LBM\left(Ko, G11_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, G22_e, k_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, G12_e, n_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, {G12_e}^{T}, k_e, n_e\right)\right)$$

$$K=\begin{bmatrix} 60000.0 & 0.0 & 0.0 & -60000.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 150.0 & 150.0 & 0.0 & -150.0 & 150.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 150.0 & 200.0 & 0.0 & -150.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -60000.0 & 0.0 & 0.0 & 120000.0 & 0.0 & 0.0 & -60000.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -150.0 & -150.0 & 0.0 & 300.0 & 0.0 & 0.0 & -150.0 & 150.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 150.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 & 400.0 & 0.0 & -150.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -60000.0 & 0.0 & 0.0 & 120000.0 & 0.0 & 0.0 & -60000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -150.0 & -150.0 & 0.0 & 300.0 & 0.0 & 0.0 & -150.0 & 150.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 150.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 & 400.0 & 0.0 & -150.0 & 100.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -60000.0 & 0.0 & 0.0 & 60000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -150.0 & -150.0 & 0.0 & 150.0 & -150.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 150.0 & 100.0 & 0.0 & -150.0 & 200.0 \end{bmatrix}\frac{kN}{m}$$

$$G=\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.6 & -0.1 & 0.0 & 0.6 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.1 & -0.3 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.1 & 0.0 & -1.2 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.1 & 0.0 & -1.2 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & -0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.1 & 0.0 & -0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}\frac{kN}{m}$$

Globalna macierz sztywności **K** *i macierz geometryczna* **G** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* |**K**|=0 , |**G**|=0

$$\left\| K \cdot \frac{1 \cdot m}{kN} \right\| = 0.000$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

$$\left\| G \cdot \frac{1 \cdot m}{kN} \right\| = 0.000$$

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Kopiowanie Macierzy **K** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$Ko := K$ $Go := G$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Lwb := 3$ *- liczba warunków brzegowych*

$$s := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$i := 1..Lr$ $j := 1..Lwb$

$Ko_{s_j,i} := 0$ $Go_{s_j,i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$Ko_{i,s_j} := 0$ $Go_{i,s_j} := 0$ *zerowanie kolumn*

$Ko_{s_j,s_j} := 1 \cdot \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$\left\| Ko \cdot 1 \cdot \frac{m}{kN} \right\| = 3.281 \cdot 10^{27}$ *- wyznacznik macierzy* **K**o *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}o| > 0$

$\left\| Go \cdot 1 \cdot \frac{m}{kN} \right\| = 0.000$ *- wyznacznik macierzy* **G**o *może być równy zeru*

$|Ko + \sigma \cdot Go| = 0$ *- warunek niejednoznaczności przemieszczeń, czyli mozliwość utraty stateczności*

$$KG(x) := (Ko + x \cdot Go) \cdot \frac{m}{kN}$$

$$N := 40$$

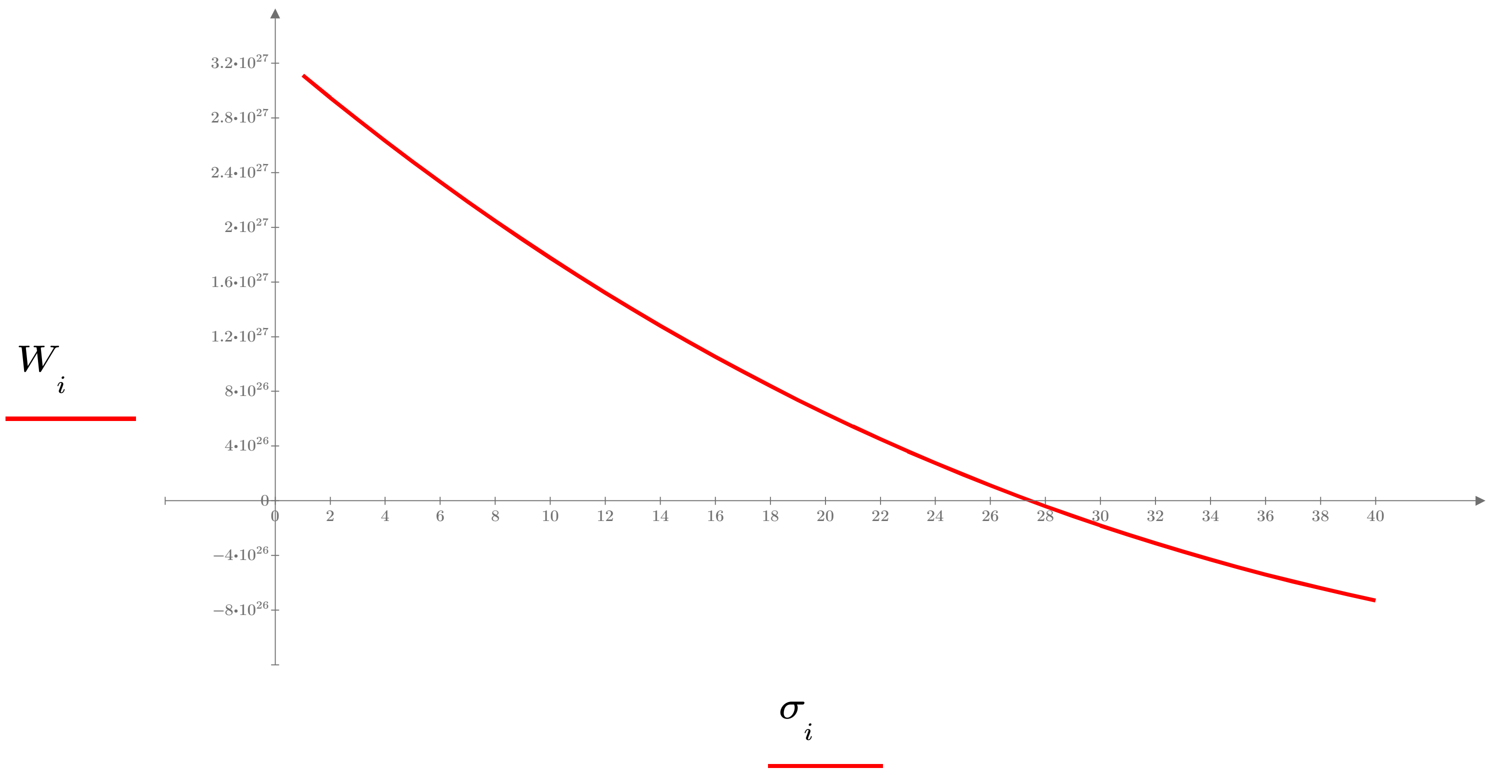
$$i := 1 .. N \qquad \sigma_i := i \cdot 1$$

$$W_i := \left\| KG\left(\sigma_i\right) \right\|$$

Oszacowanie wartości siły krytycznej za pomocą wzoru Eulera

$$Pe := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_1}{\left(3 \cdot L_1\right)^2} \qquad Pe = 27.416\ kN$$

Wykres zmienności wyznacznika macierzy

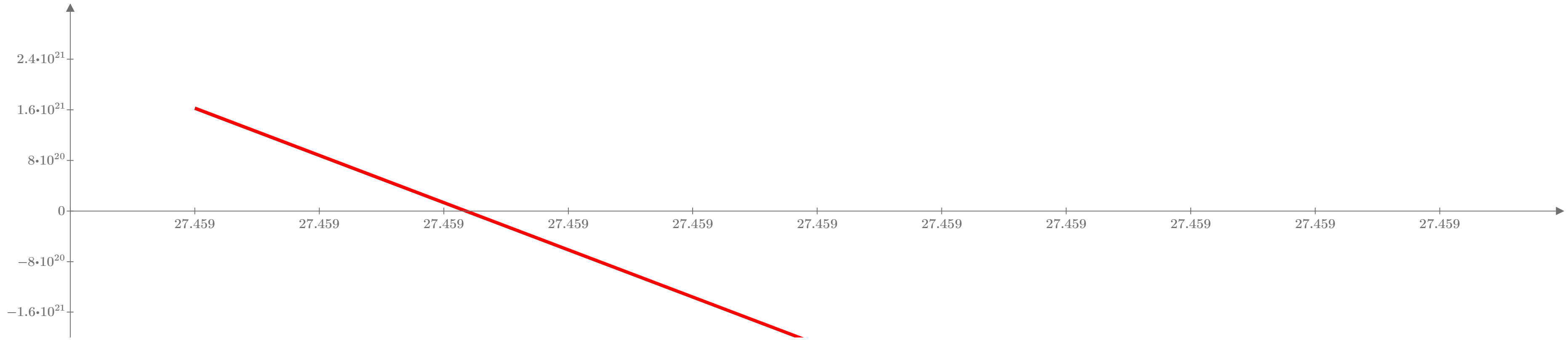


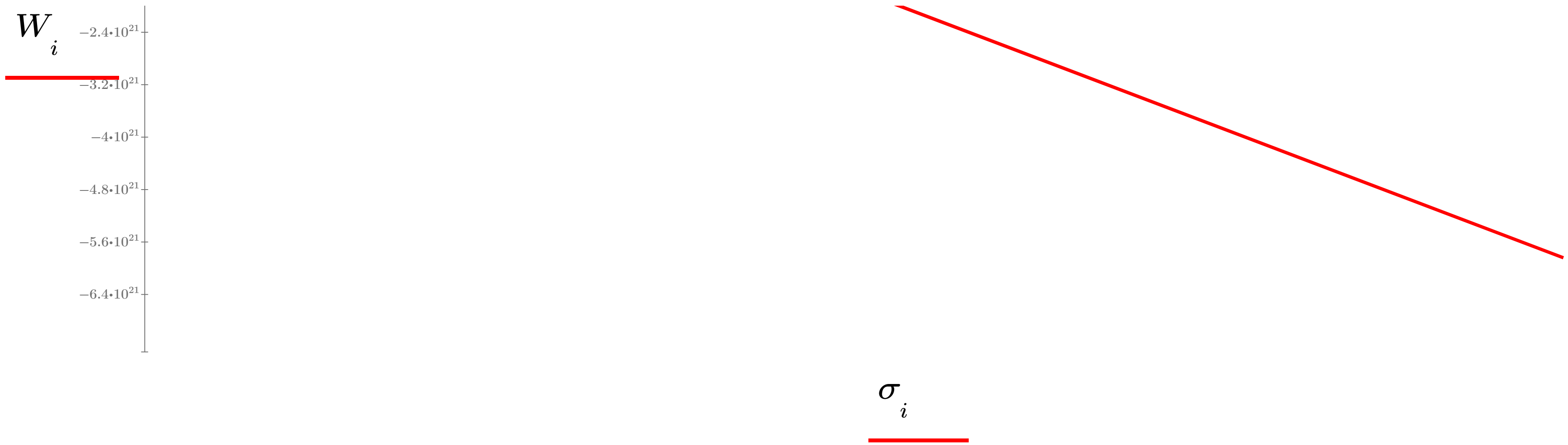
$N1 := 274589$ $N2 := 274590$

$i := N1 .. N2$ $\sigma_i := i \cdot 0.0001$

$W_i := \left\| KG\left(\sigma_i\right) \right\|$

Siła krytyczna ma przybliżoną wartość Pkr=27.459 kN , wartość teoretyczna (eulerowska) wynosi Pe=27.416kN
Różnica wynika z przybliżenia linii ugięcia wielomianami 3 stopnia. Podział pręta na 3 elementy daje sztywniejszą belkę i stąd większa siła krytyczna. Zwiększanie liczby elementów w pręcie obniży siłę krytyczną do wartości bliższej Pe





W_i
$-2.4 \cdot 10^{21}$
$-3.2 \cdot 10^{21}$
$-4 \cdot 10^{21}$
$-4.8 \cdot 10^{21}$
$-5.6 \cdot 10^{21}$
$-6.4 \cdot 10^{21}$
σ_i