

Macierz elementu bez przegubów



$$[u_x \cdot u_y \cdot \varphi_z]$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} & 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & -\frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} & 0 & -\frac{3 EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & -\frac{3 EJ}{L^2} & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć składowe macierzy sztywności elementów ramy płaskiej.
 Podać postacie bloków A, B i C macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

$$E := 13 \text{ GPa} \quad b := 11 \text{ cm} \quad h := 17 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12} = 4503.583 \text{ cm}^4 \quad A := b \cdot h = 187.000 \text{ cm}^2$$

$$EJ := E \cdot J$$

$$EA := E \cdot A$$

$$EJ = 585.466 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad EA = 243100.000 \text{ kN}$$

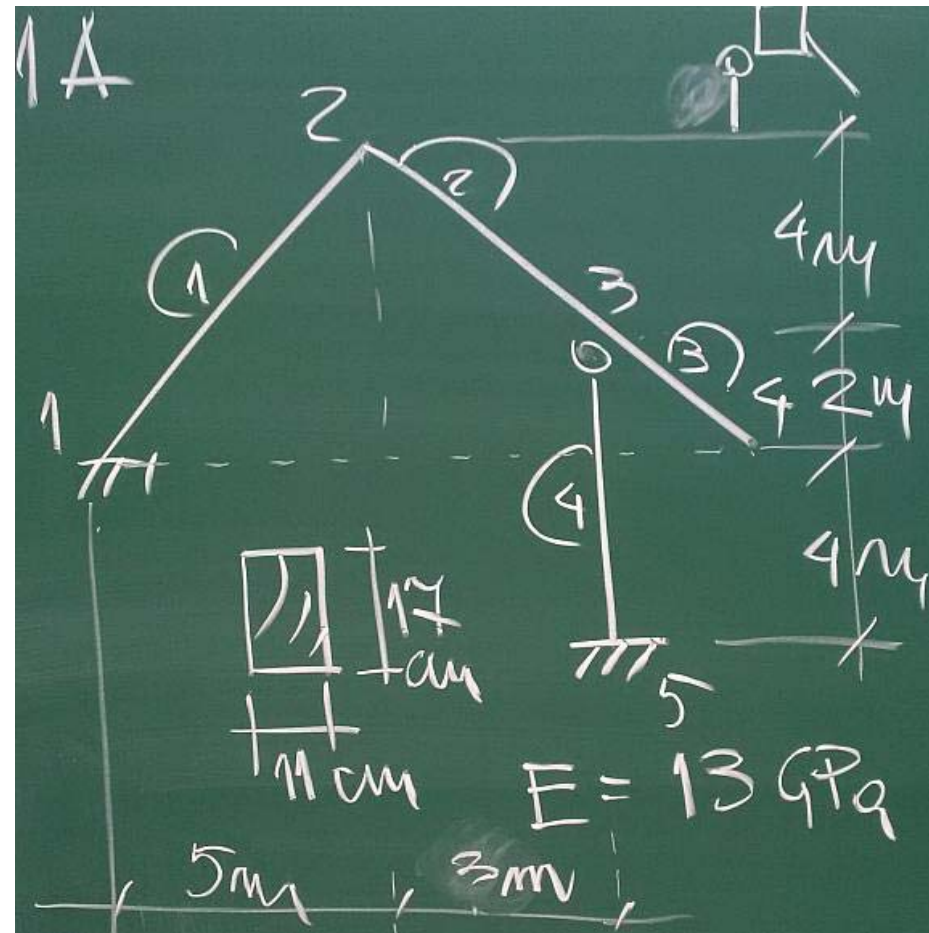
Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe (podporowe)

$$u_{X1} = 0 \quad u_{Y1} = 0 \quad \varphi_1 = 0$$

$$u_{X5} = 0 \quad u_{Y5} = 0 \quad \varphi_5 = 0$$



Element "1" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := 5 \text{ m}$$

$$Ly := 6 \text{ m}$$

$$L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 7.810250 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

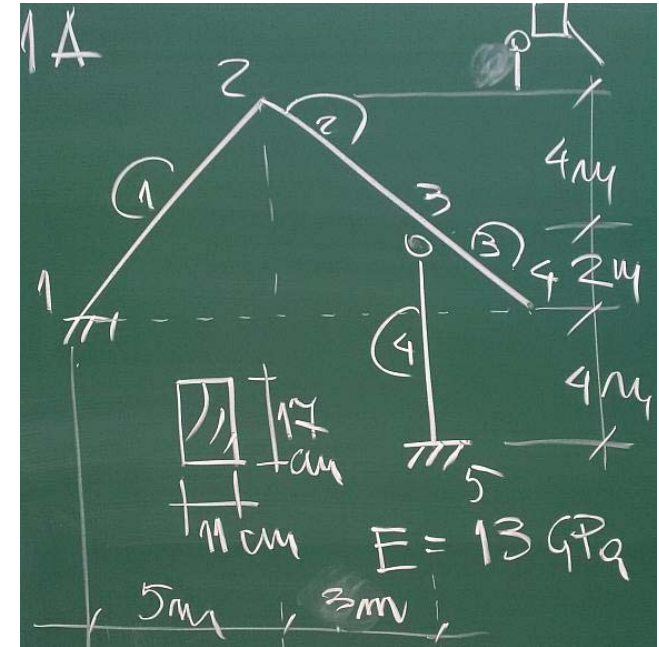
$$A = \begin{bmatrix} 31126 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 14.746 \frac{1}{m} & 57.587 \\ 0 & 57.587 & 299.84 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 31126 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 14.746 \frac{1}{m} & -57.587 \\ 0 & -57.587 & 299.84 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -31126 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -14.746 \frac{1}{m} & 57.587 \\ 0 & 57.587 & 149.92 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "2" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := 3 \text{ m} = 3 \text{ m} \quad Ly := -4 \text{ m} = -4 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.000000 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

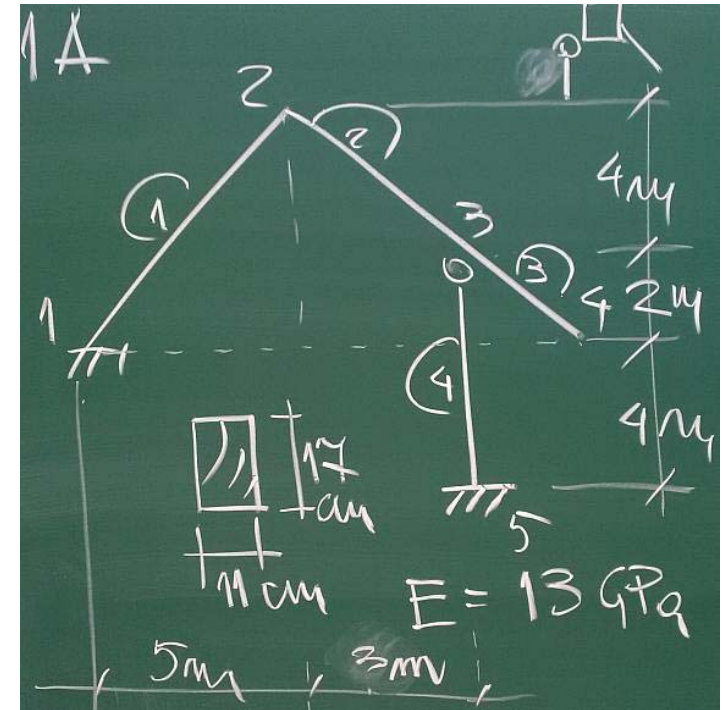
$$A = \begin{bmatrix} 48620 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 56.205 \frac{1}{m} & 140.51 \\ 0 & 140.51 & 468.37 m \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 48620 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 56.205 \frac{1}{m} & -140.51 \\ 0 & -140.51 & 468.37 m \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -48620 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -56.205 \frac{1}{m} & 140.51 \\ 0 & 140.51 & 234.19 m \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "3" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := 1.5 \text{ m}$$

$$Ly := -2 \text{ m}$$

$$L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 2.500000 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

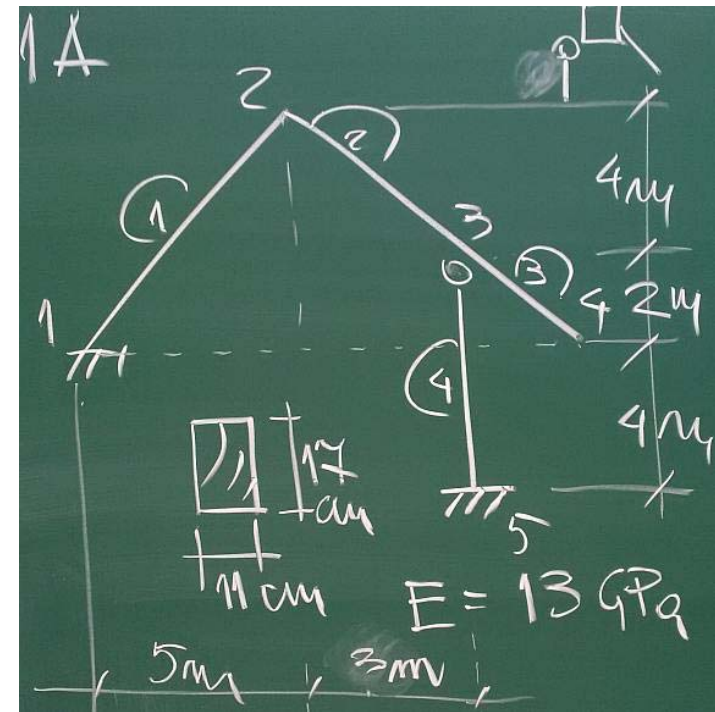
$$A = \begin{bmatrix} 97240 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 449.64 \frac{1}{m} & 562.05 \\ 0 & 562.05 & 936.75 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 97240 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 449.64 \frac{1}{m} & -562.05 \\ 0 & -562.05 & 936.75 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -97240 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -449.64 \frac{1}{m} & 562.05 \\ 0 & -562.05 & 468.37 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "4" - Bloki macierzy elementu z przegubem w węźle początkowym

$$Lx := 0 \text{ m} \quad Ly := -6 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 6.000000 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 40517 & 0 & 0 \\ 0 & 8.1315 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{-3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 40517 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 8.1315 \frac{1}{m} & -48.789 \\ 0 \frac{1}{m} & -48.789 & 292.73 \text{ m} \end{bmatrix} kN$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -40517 & 0 & 0 \\ 0 & -8.1315 & 48.7888 \text{ m} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

