

## *Statyka kratownicy stalowej o 2 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami i ciężarem własnym*

ORIGIN := 1      - *Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

E := 10GPa      - *Moduł Younga drewna*       $\rho := 700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$       - *gęstość drewna*       $\gamma := \rho \cdot g$

a1 := 5cm      b1 := 7cm

a2 := 5cm      b2 := 5cm

A1 := b1 · a1      - *Pole powierzchni przekroju elementów 1...3*      A1 = 35.000 · cm<sup>2</sup>

A2 := b2 · a2      - *Pole powierzchni przekroju elementów 4...9*      A2 = 25.000 · cm<sup>2</sup>

*Parametry pomocnicze:*

$L_{ss} := 2$  - Liczba stopni swobody węzła

$L_e := 9$  - Liczba elementów

$L_w := 6$  - Liczba węzłów

$L_r := L_{ss} \cdot L_w$  - Liczba równań

$Ko_{L_r, L_r} := 0$  Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami

*Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych*

$LBM(A, B, w, k) :=$ 

for	$i \in 0.. \text{rows}(B) - 1$	
	for	$j \in 0.. \text{cols}(B) - 1$
	$A_{w+i, k+j} \leftarrow B_{1+i, 1+j}$	

A
---

*Współrzędne węzłów kratownicy*

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} m$$

$$Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

*Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów*

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

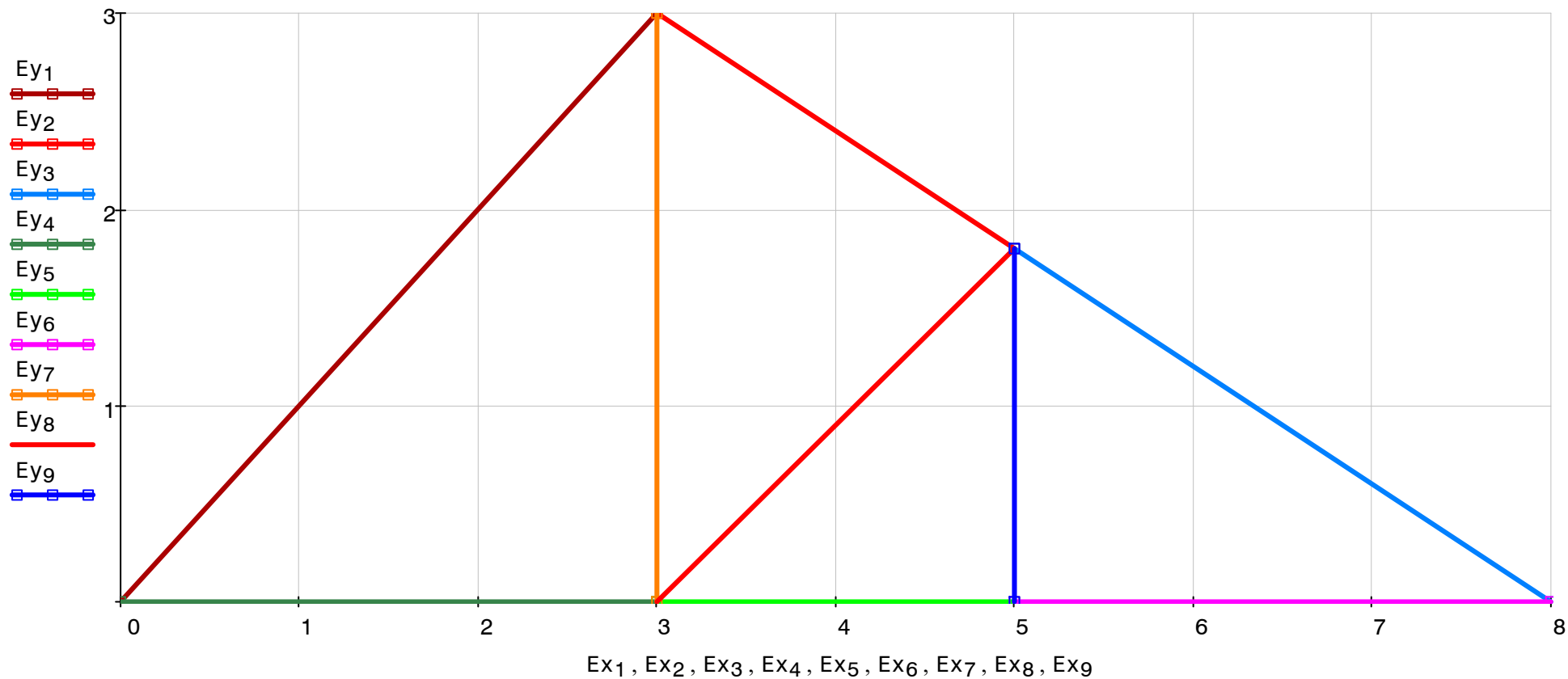
*Przekroje elementów*

$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \end{pmatrix}$$

$e := 1 \dots Le$       *Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

*Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych*

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \quad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \quad Ex, Ey - \text{współrzędne węzłów elementów kratownicy}$$



## Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$$

$$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$$

$$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

$$Lx =$$

	1
1	3.000
2	2.000
3	3.000
4	3.000
5	2.000
6	3.000
7	0.000
8	2.000
9	0.000

m

$$Ly =$$

	1
1	3.000
2	-1.200
3	-1.800
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	-3.000
8	1.800
9	-1.800

m

$$L =$$

	1
1	4.243
2	2.332
3	3.499
4	3.000
5	2.000
6	3.000
7	3.000
8	2.691
9	1.800

m

$$J_{we} := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalszych obliczeniach, można pokazać bloki **J** macierzy sztywności wszystkich elementów

$$J_1 = \begin{pmatrix} 4124.8 & 4124.8 \\ 4124.8 & 4124.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 11033.9 & -6620.3 \\ -6620.3 & 3972.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 7355.9 & -4413.6 \\ -4413.6 & 2648.1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 8333.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} 12500.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_6 = \begin{pmatrix} 8333.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 8333.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_8 = \begin{pmatrix} 5133.2 & 4619.9 \\ 4619.9 & 4157.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_9 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 13888.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

## Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$$n_e := L_{ss} \cdot W_{p_e} - 1 \quad k_e := L_{ss} \cdot W_{k_e} - 1 \quad <--- \text{numery stopni swobody węzłów początkowych } (n_e) \text{ i końcowych } (k_e)$$

$$K := \sum \left( LBM(K_o, J_e, n_e, n_e) + LBM(K_o, J_e, k_e, k_e) - LBM(K_o, J_e, n_e, k_e) - LBM(K_o, J_e, k_e, n_e) \right)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	12458.1	4124.8	-4124.8	-4124.8	-8333.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	4124.8	4124.8	-4124.8	-4124.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-4124.8	-4124.8	15158.7	-2495.6	0.0	0.0	-11033.9	6620.3	0.0	0.0
4	-4124.8	-4124.8	-2495.6	16430.3	0.0	-8333.3	6620.3	-3972.2	0.0	0.0
5	-8333.3	0.0	0.0	0.0	25966.6	4619.9	-5133.2	-4619.9	-12500.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-8333.3	4619.9	12491.3	-4619.9	-4157.9	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-11033.9	6620.3	-5133.2	-4619.9	23523.1	-6414.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	6620.3	-3972.2	-4619.9	-4157.9	-6414.0	24667.2	0.0	-13888.9
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-12500.0	0.0	0.0	0.0	20833.3	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-13888.9	0.0	13888.9
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-7355.9	4413.6	-8333.3
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4413.6	-2648.1	0.0
13										

$\cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

$n = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 3.000 \\ 7.000 \\ 1.000 \\ 5.000 \\ 9.000 \\ 3.000 \\ 5.000 \\ 7.000 \end{pmatrix}$

Globalna macierz sztywności  $\mathbf{K}$  bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.  $|\mathbf{K}|=0$

$$\left| \mathbf{K} \cdot \frac{1 \text{ m}}{\text{kN}} \right| = -2.104 \times 10^1$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

### Globalny wektor sił węzłowych

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	0.684
6	1.879
7	-3.857
8	-4.596
9	0.000
10	0.000
11	0.000
12	0.000

· kN

### Rzutowanie siły w węźle 2 na osie globalnego układu współrzędnych

$$F_{x3} := 2 \text{ kN} \cdot \sin(20 \text{ deg}) = 0.684 \cdot \text{kN}$$

$$F_{y3} := 2 \text{ kN} \cdot \cos(20 \text{ deg}) = 1.879 \cdot \text{kN}$$

### Siła w węźle 4

$$F_{x4} := -6 \text{ kN} \cdot \sin(40 \text{ deg}) = -3.857 \cdot \text{kN}$$

$$F_{y4} := -6 \text{ kN} \cdot \cos(40 \text{ deg}) = -4.596 \cdot \text{kN}$$

- siły węzłowe wywołane ciężarem własnym elementu "e"

$$q_e := \gamma \cdot L_e \cdot A_e \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

*Agregacja wektora obciążeń grawitacyjnych Q (metodą podobną do stosowanej w agregacji macierzy sztywności)*

$$q_{0Lr} := 0$$

$$Q := \sum_e \left( \text{LBM}(q_0, q_e, n_e, 1) + \text{LBM}(q_0, q_e, k_e, 1) \right)$$

	1
1	0.000
2	-76.710
3	0.000
4	-104.729
5	0.000
6	-91.735
7	0.000
8	-108.582
9	0.000
10	-58.350
11	0.000
12	-67.771

Q = N

*Całkowity ciężar kratownicy*

$$Q_c := \gamma \cdot \left[ \sum_e (A_e \cdot L_e) \right] \quad Q_c = 0.508 \cdot \text{kN}$$



*Kopiowanie Macierzy **K** i wektora **p** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$$K_0 := K \quad p_0 := p + Q$$

*Uwzględnienie warunków brzegowych*

$L_{wb} := 3$  - liczba warunków brzegowych

$$s := \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{- globalne numery przemieszczeń węzłów} \\ \text{blokowanych na podporach}$$

$$i := 1 .. L_r \quad j := 1 .. L_{wb}$$

$$K_{0_{s_j, i}} := 0 \quad \text{zerowanie wierszy}$$

$$K_{0_{i, s_j}} := 0 \quad \text{zerowanie kolumn}$$

$$K_{0_{s_j, s_j}} := 1 \frac{kN}{m} \quad \text{wstawianie jedności na przekątną} \\ \text{macierzy sztywności}$$

$$p_{0_{(s_j)}} := 0 \quad \text{zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12458.1	0.0	-4124.8	-4124.8	-8333.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-4124.8	0.0	15158.7	-2495.6	0.0	0.0	-11033.9	6620.3	0.0	0.0	0.0
4	-4124.8	0.0	-2495.6	16430.3	0.0	-8333.3	6620.3	-3972.2	0.0	0.0	0.0
5	-8333.3	0.0	0.0	0.0	25966.6	4619.9	-5133.2	-4619.9	-12500.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-8333.3	4619.9	12491.3	-4619.9	-4157.9	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-11033.9	6620.3	-5133.2	-4619.9	23523.1	-6414.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	6620.3	-3972.2	-4619.9	-4157.9	-6414.0	24667.2	0.0	-13888.9	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-12500.0	0.0	0.0	0.0	20833.3	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-13888.9	0.0	13888.9	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	...

$\frac{\text{kN}}{\text{m}}$

$$\left| \mathbf{K}_0 \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{kN}} \right| = 9.945 \times 10^{35} \quad - \text{wyznacznik macierzy } \mathbf{K}_0 \text{ jest zawsze wi\u0119kszy od zera, } |\mathbf{K}_0| > 0$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.000	0.000	0.000	-0.105	0.684	1.788	-3.857	-4.705	0.000	-0.058	0.000	0.000

· kN

*Rozwiązanie układu równań:*  $u := \text{lsolve}(K_o, p_o)$

*u - wektor przemieszczeń węzłowych*

$$u^T =$$

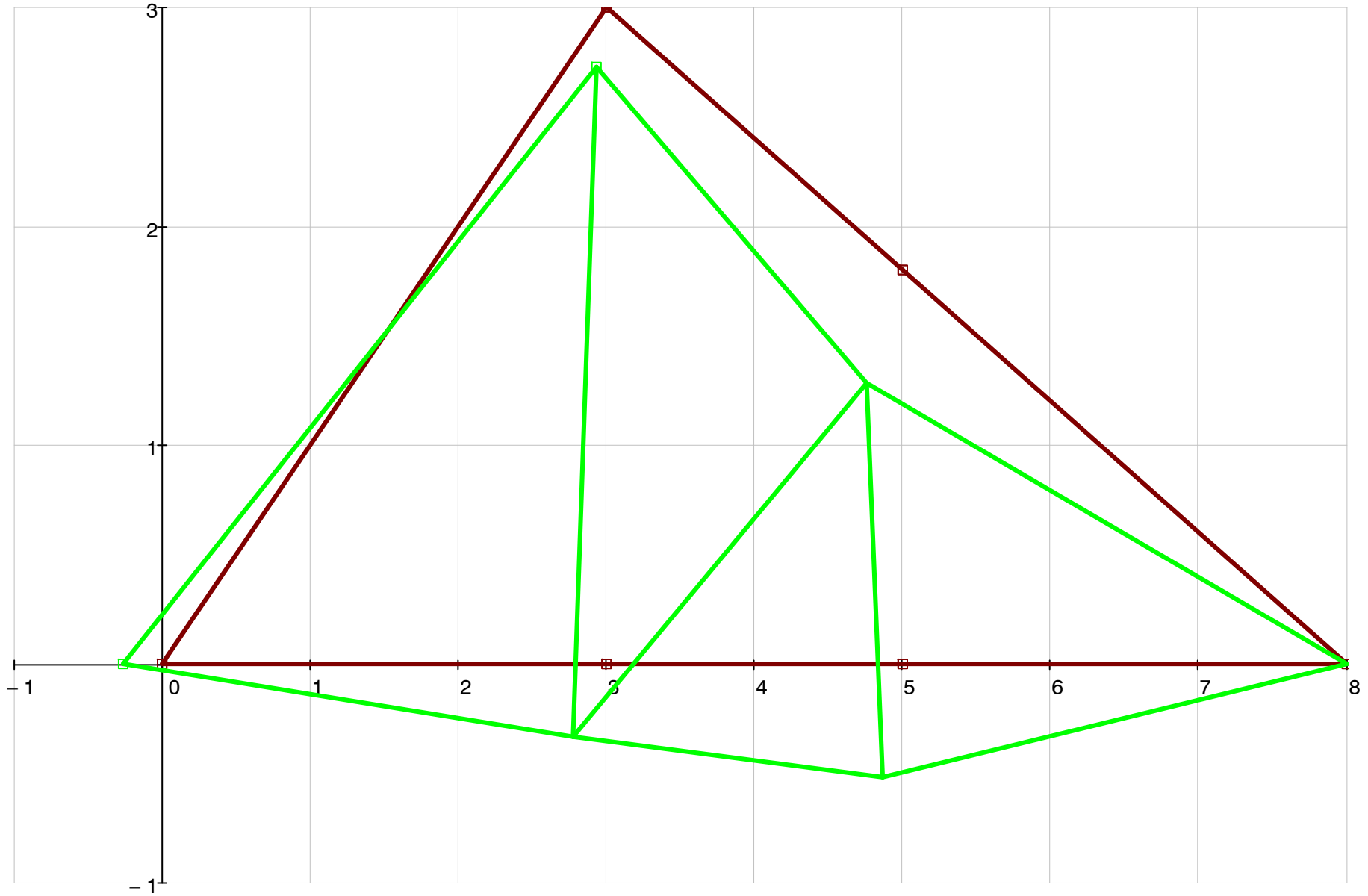
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-1.3195	0.0000	-0.3404	-1.3675	-1.1273	-1.6626	-1.2161	-2.5851	-0.6764	-2.5893	0.0000	0.0000

· mm

*Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników*

$$\text{skala} := 200$$
$$Dx_e := Ex_e + \text{skala} \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix}$$
$$Dy_e := Ey_e + \text{skala} \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$

- Ey1
- Ey2
- Ey3
- Ey4
- Ey5
- Ey6
- Dy1
- Dy2
- Dy3
- Dy4
- Dy5
- Dy6
- Dy7
- Dy8
- Dy9



EX<sub>1</sub>, EX<sub>2</sub>, EX<sub>3</sub>, EX<sub>4</sub>, EX<sub>5</sub>, EX<sub>6</sub>, DX<sub>1</sub>, DX<sub>2</sub>, DX<sub>3</sub>, DX<sub>4</sub>, DX<sub>5</sub>, DX<sub>6</sub>, DX<sub>7</sub>, DX<sub>8</sub>, DX<sub>9</sub>

### Obliczenie reakcji podpór

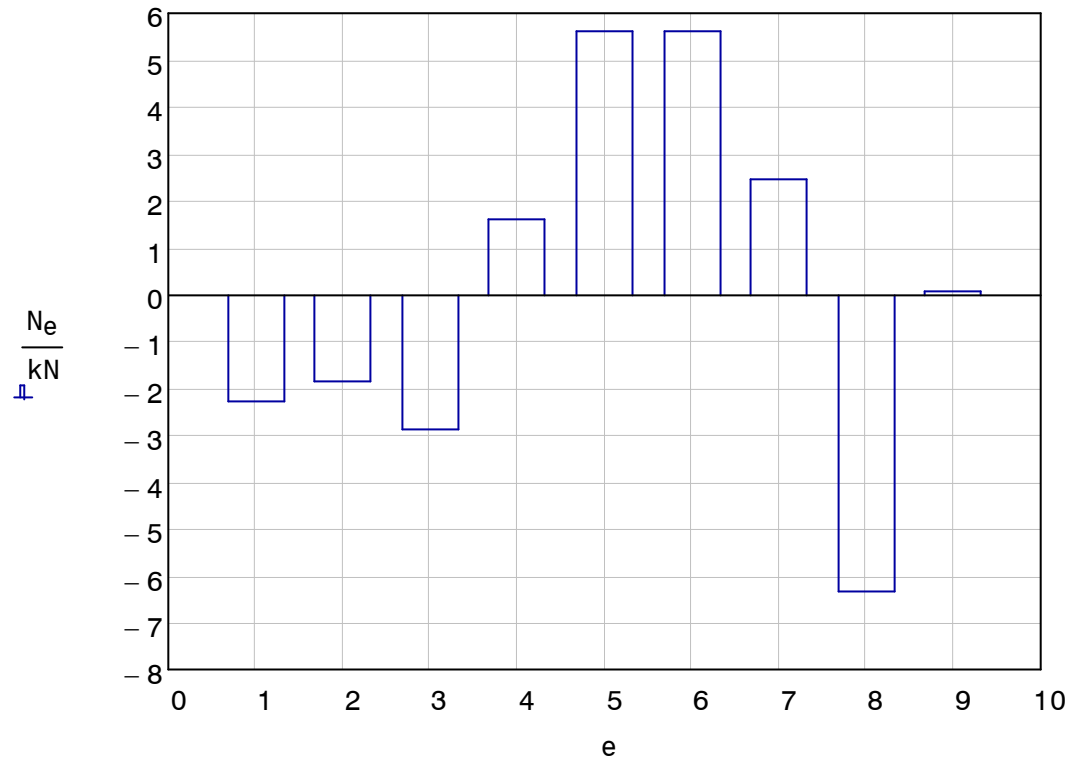
$$r := K \cdot u - p - Q$$

$r^T =$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	· kN
	1	0.000	1.679	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	3.173	1.546	

### Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^2} \cdot \left[ (u_{2 \cdot Wk_{e-1}} - u_{2 \cdot Wp_{e-1}}) \cdot Lx_e + (u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}) \cdot Ly_e \right]$$

$N =$		1	· kN
	1	-2.266	
	2	-1.868	
	3	-2.873	
	4	1.602	
	5	5.636	
	6	5.636	
	7	2.459	
	8	-6.348	
	9	0.058	
	10		



## Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{E}{(L_e)^2} \cdot \left[ (u_2 \cdot w_{k_{e-1}} - u_2 \cdot w_{p_{e-1}}) \cdot L_{x_e} + (u_2 \cdot w_{k_e} - u_2 \cdot w_{p_e}) \cdot L_{y_e} \right]$$

	1
1	-0.647
2	-0.534
3	-0.821
4	0.641
5	2.255
6	2.255
7	0.983
8	-2.539
9	0.023

· MPa

