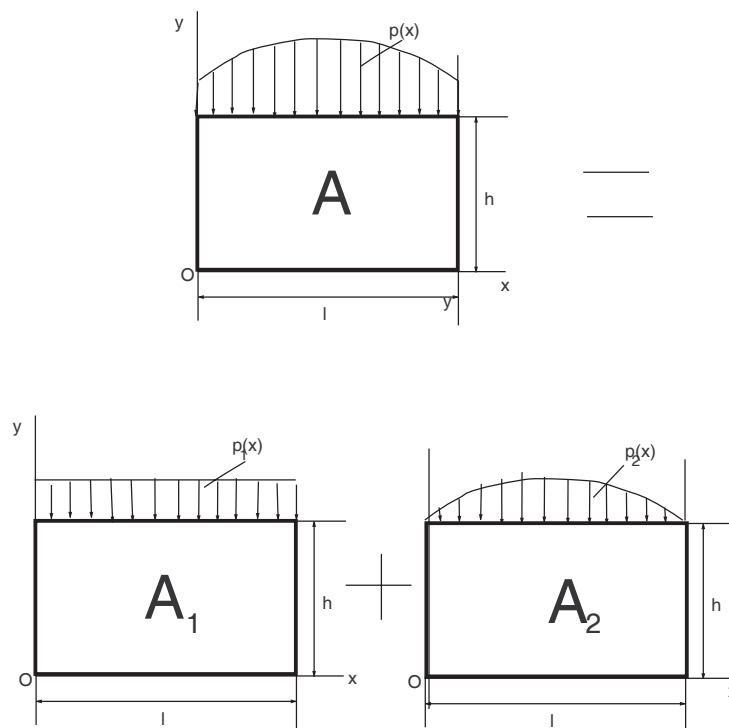


ĆWICZENIE PROJEKTOWE NR 1 Z TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

To jest nasze ćwiczenie projektowe:



Dzielę na 2 zadania A1 i A2.

$$p(x) = P \left[1 + \frac{\alpha}{l^2} (l - x)x \right] = p_1(x) + p_2(x) \quad (1)$$

gdzie

$$p_1(x) = P$$

oraz

$$p_2(x) = \frac{P\alpha}{l^2} (l - x)x.$$

Funkcja naprężeń Airy'ego przyjmujemy w postaci wielomianu piątego rzędu i tensor naprężenia ma postać:

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \frac{12P}{h^3} \left[\frac{1}{2} x (l - x) \left(\frac{h}{2} - y \right) - \frac{h^2}{20} \left(\frac{h}{2} - y \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} - y \right)^3 \right]$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = -\frac{6P}{h^3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} - y \right)^3 - \frac{h^2}{4} \left(\frac{h}{2} - y \right) + \frac{h^3}{12} \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \frac{6P}{h^3} \left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - y \right)^2 \right] \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

Wektor przemieszczenia ma składowe:

$$u^{(1)} = \frac{6P}{Eh^3} \left\{ \frac{l^2}{4} \left(x - \frac{l}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - y \right) - \frac{1}{3} \left(x - \frac{l}{2} \right)^3 \left(\frac{h}{2} - y \right) + \frac{(2+\nu)}{3} \left(x - \frac{l}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - y \right)^3 - \right. \\ \left. - \frac{(2+5\nu)}{20} h^2 \left(x - \frac{l}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - y \right) + \frac{\nu h^3}{12} \left(x - \frac{l}{2} \right) \right\} \quad (3)$$

$$v^{(1)} = \frac{6P}{Eh^3} \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{h}{2} - y \right)^4 - \frac{h^2}{8} \left(\frac{h}{2} - y \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left(\frac{h}{2} - y \right) + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right)^2 \left[\frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 \right] - \frac{\nu h^2}{20} \left(\frac{h}{2} - y \right)^2 + \frac{\nu}{6} \left(\frac{h}{2} - y \right)^4 - \frac{1}{12} \left(x - \frac{l}{2} \right)^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 \left[l^2 + \frac{(8+5\nu)}{5} h^2 \right] + \mathcal{B} \right\} \quad (4)$$

gdzie

$$\mathcal{B} = \frac{1}{12} \left(\frac{l}{2} \right)^4 - \frac{1}{8} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \left[l^2 + \frac{8+5\nu}{5} h^2 \right]$$

Funkcja Airy'ego:

$$\varphi^{(2)}(x, y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 C_m \psi_m(z) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad z = \frac{m\pi y}{l} \quad (5)$$

gdzie

$$\psi_m(z) = b_m \sinh z + c_m z \cosh z + d_m z \sinh z \quad (6)$$

W tej funkcji, współczynniki b_m, c_m, d_m nie zależą od sposobu obciążenia:

$$b_m = \frac{m\beta \cosh m\beta + \sinh m\beta}{(\sinh m\beta)^2 - (m\beta)^2}$$

$$c_m = -\frac{m\beta \cosh m\beta + \sinh m\beta}{(\sinh m\beta)^2 - (m\beta)^2}$$

$$d_m = \frac{m\beta \sinh m\beta}{(\sinh m\beta)^2 - (m\beta)^2}$$

$$\beta = \frac{\pi h}{l}$$

C_m znajdujemy rozwiązując funkcję $p_2(x)$ w szereg Fourier'a, zatem

$$C_m = \frac{2}{l} \int_0^l p_2(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad (7)$$

otrzymujemy:

$$C_m = -8P\alpha \left(\frac{1}{m\pi} \right)^3 \quad \text{dla } m=1,3,5\dots \quad (8)$$

Wzory na naprężenia:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(2)} &= - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_m \psi_m''(z) \sin \frac{m\pi x}{l} \\ \sigma_{yy}^{(2)} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_m \psi_m(z) \sin \frac{m\pi x}{l} \\ \sigma_{xy}^{(2)} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_m \psi_m'(z) \cos \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie ψ_m' i ψ_m'' są odpowiednio pochodną pierwszego i drugiego rzędu funkcji $\psi_m(z)$ (6) względem zmiennej z :

$$\psi_m'(z) = d_m \sinh z + d_m z \cosh z + c_m z \sinh z \quad (10)$$

$$\psi_m''(z) = 2d_m \cosh z + c_m \sinh z + c_m z \cosh z + d_m z \sinh z \quad (11)$$

Mając wartości naprężenia, składowe tensora odkształcenia obliczymy, korzystając z prawa Hooke'a:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^{(2)} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{xx}^{(2)} - \nu \sigma_{yy}^{(2)} \right) = -\frac{1}{E} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_m \left(\psi_m''(z) + \nu \psi_m(z) \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \\ \epsilon_{yy}^{(2)} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{yy}^{(2)} - \nu \sigma_{xx}^{(2)} \right) = \frac{1}{E} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_m \left(\psi_m(z) + \nu \psi_m''(z) \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \\ \epsilon_{xy}^{(2)} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}^{(2)} = \frac{1+\nu}{E} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} C_m \psi_m'(z) \cos \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \quad (12)$$

Całkując związki (12) i korzystając z warunków brzegowych, mamy wzory na składowe wektora przemieszczenia:

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \frac{l}{E\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} C_m \left(\psi_m''(z) + \nu \psi_m(z) \right) \cos \frac{m\pi x}{l} \\ v^{(2)} &= \frac{l}{E\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} C_m \left(\psi_m(z) + \nu \psi_m'(z) \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie

$$\Psi_m(z) = (b_m - c_m) \cosh z - d_m \sinh z + d_m z \cosh z + c_m z \sinh z \quad (14)$$

Na podstawie zasady superpozycji, rozwiązania naszego zagadnienia jest sumą poszczególnych rozwiązań:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{xx}^{(2)}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(2)}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)}$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}$$

$$v = v^{(1)} + v^{(2)}$$

Dane są:

- długość tarczy $l =$
- wysokość tarczy $h =$
- parametr obciążenia $P =$
- parametr obciążenia $\alpha =$
- moduł Young'a $E =$
- współczynnik Poisson'a $\nu =$

Należy analitycznie wyznaczyć rozkład przemieszczeń u, v oraz naprężeń σ_{xx}, σ_{yy} i σ_{xy} wzdłuż prostych: $x = 0, x = l/2, x = l/4$ oraz $y = 0, y = h/2, y = h$, potem sporządzić wykresy.

(Wykreślone powinny być zmienności tych wielkości mechanicznych, które na ustalonych odcinkach nie są równe zero)