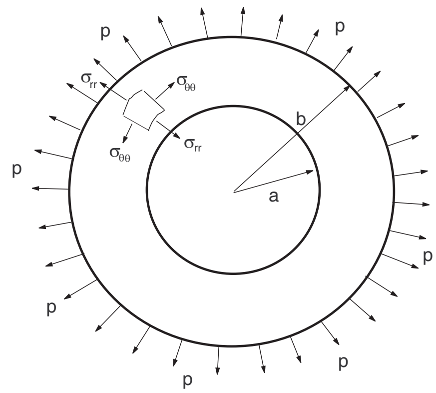
ĆWICZENIE PROJEKTOWE NR 2 Z TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

Przedmiotem ćwiczenia jest analiza płaskiego stanu naprężenia, uplastycznienia materiału we wszystkich punktach tarczy (Rys.1). Materiał jest jednorodny i izotropowy. Jako kryterium uplastycznienia przyjmujemy hipotezę prof. M.T. Hubera przy wartości granicznej naprężenia zredukowanego wynoszącej σ_0.



Rysunek 1

Dane:

- $\sigma_0 =$ (MPa) (wymagane tylko, kiedy musimy obliczyć naprężenia)
- $a =$ (m)
- $b =$ (m)

1 Stan sprężysty $(0 < p_e < p_{pl})$

$$\sigma_{rr} = \frac{b^2\,p}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{1}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{b^2\,p}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{2}$$

Widzimy, że $0 \leq \sigma_{rr} < \sigma_{\vartheta\vartheta}$ dla $a \leq r \leq b$.

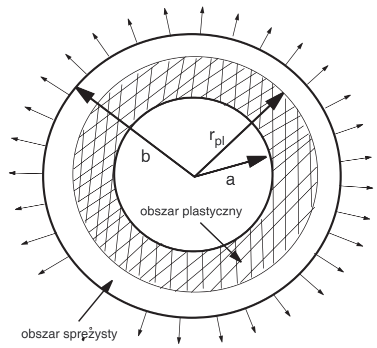
2 Stan sprężysto-plastyczny $(p_{pl} \leq p < p_{max})$

W tym stanie, musimy spełniać równanie równowagi:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = 0 \tag{3}$$

oraz warunek plastyczności Hubera:

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\,\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^2 = \sigma_0^2 \tag{4}$$



Rysunek 2

Plastyczne płynięcie pojawia się najpierw na brzegu $r = a$, kiedy naprężenia (1) i (2) spełniają warunek (4), zatem:

$$\frac{p_{pl}}{\sigma_0} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \tag{5}$$

czyli tarcza jest w stanie sprężystym kiedy:

$$0 < p_e < p_{pl} \tag{6}$$

Kiedy $p_{pl} \leq p$, istnieją jednocześnie obszary sprężysty i plastyczny (rys.2). Z (4) mamy:

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{rr} + \sqrt{4\,\sigma_0^2 - 3\,\sigma_{rr}^2}\right) \tag{7}$$

Tu zakładamy, że $4\,\sigma_0^2 - 3\,\sigma_{rr}^2 \geq 0$, stąd:

$$\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155 \qquad (*)$$

.

Podstawiając (7) do (3), po całkowaniu otrzymamy:

$$r = \mathcal{C}\,\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\left(-\sigma_{rr} + \sqrt{4\,\sigma_0^2 - 3\,\sigma_{rr}^2}\right)}}\ \exp\left\{-\sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2\sigma_0 - \sqrt{3}\,\sigma_{rr}}{2\sigma_0 + \sqrt{3}\,\sigma_{rr}}}\right\} \tag{8}$$

z warunkiem

$$\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} < 1 \qquad (**)$$

oraz stałą całkowania $\mathcal{C}$ znajdziemy z warunku $\sigma_{rr} = 0$ przy $r = a$:

$$a = \mathcal{C}\,\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}\,\sigma_0}}\ \exp\left(-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,1\right) \rightarrow \mathcal{C} = a\,\sqrt[4]{3}\,\sqrt{\sigma_0}\ \exp\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}\right) \tag{9}$$

stąd mamy rozkład naprężenia σ_{rr} w obszarze plastycznym:

$$\frac{r}{a} = \sqrt{\frac{2\,\sigma_0}{-\sigma_{rr} + \sqrt{4\sigma_0^2 - 3\,\sigma_{rr}^2}}}\ \exp\left\{\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} - \sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2\sigma_0 - \sqrt{3}\,\sigma_{rr}}{2\sigma_0 + \sqrt{3}\,\sigma_{rr}}}\right\} \tag{10}$$

Znając σ_{rr}, możemy obliczyć naprężenie $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ w obszarze plastycznym według wzoru (7). Niech na granicy obszarów sprężystego i plastycznego $r = r_{pl}$, naprężenie σ_{rr} wynosi q. Z warunków ciągłości naprężeń σ_{rr} i $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ przy przejściu z jednego do drugiego obszaru, otrzymamy układ dwóch równań dla dwóch niewiadomych q i r_{pl}:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{r_{pl}}{a} = \sqrt{\dfrac{2\,\sigma_0}{-q + \sqrt{4\sigma_0^2 - 3\,q^2}}}\ .\ \exp\left\{\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{4} - \sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{2\sigma_0 - \sqrt{3}\,q}{2\sigma_0 + \sqrt{3}\,q}}\right\} \\[2ex] \quad \dfrac{1}{2}\left(q + \sqrt{4\,\sigma_0^2 - 3\,q^2}\right) \ = \ \dfrac{p\,b^2 - q\,r_{pl}^2}{b^2 - r_{pl}^2} - \dfrac{b^2(q-p)}{b^2 - r_{pl}^2} \end{array}\right. \tag{11}$$

3 Całkowite płynięcie plastyczne całej tarczy $p = p_{max}$

Maksymalne ciśnienie p_{max} przy którym cała tarcza jest w stanie płynięcia plastycznego spełnia warunek $\sigma_{rr} = p_{max}$ przy $r_{pl} = b$:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2\,\sigma_0}{-p_{max} + \sqrt{4\sigma_0^2 - 3\,p_{max}^2}}}\ \exp\left\{\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} - \sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2\sigma_0 - \sqrt{3}\,p_{max}}{2\sigma_0 + \sqrt{3}\,p_{max}}}\right\} \tag{12}$$

4 Podstawowe wzory w postaci bezwymiarowej i nasze zadania

Wprowadzamy bezwymiarowe wielkości:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} = f\ ;\ \dfrac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sigma_0} = g\ ;\ \dfrac{p}{\sigma_0} = P\ ;\ \dfrac{q}{\sigma_0} = Q \\[2ex] \dfrac{p_e}{\sigma_0} = P_e\ ;\ \dfrac{p_{pl}}{\sigma_0} = P_{pl}\ ;\ \dfrac{p_{max}}{\sigma_0} = P_{max} \end{array} \tag{13}$$

W tym ćwiczeniu z zadanymi wartościami a i b trzeba:

1. Wyznaczyć P_{pl}, przy którym pojawia się uplastycznienie materiału na powierzchni $r = a$

$$P_{pl} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \tag{14}$$

2. Podać wartości ciśnień P_e, przy których tarcza jest w stanie sprężystym i sporządzić wykresy naprężeń f i g dla pewnej wybranej wartości P_e $(0 < P_e < P_{pl})$

$$f = \frac{P\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)} \qquad\qquad g = \frac{P\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)} \tag{15}$$

3. Obliczyć wartość P_{max} ($P_{pl} < P_{max}$ i $P_{max} < 1$ ze względu na (*) i (**)), kiedy cała tarcza jest w stanie plastycznym

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{-P_{max} + \sqrt{4 - 3\,P_{max}^2}}}\ \exp\left\{\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}\,P_{max}}{2 + \sqrt{3}\,P_{max}}}\right\} \tag{16}$$

4. Dla pewnej wybranej wartości P w zakresie $P_{pl} < P < P_{max}$ obliczyć Q ($Q < 1$) i promień r_{pl} ($a < r_{pl} < b$), który dzieli tarczę na obszar sprężysty i plastyczny

$$\left\{\begin{aligned} \frac{r_{pl}}{a} &= \sqrt{\frac{2}{-Q + \sqrt{4 - 3\,Q^2}}}\ \cdot\ \exp\left\{\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} - \sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}\,Q}{2 + \sqrt{3}\,Q}}\right\} \\ \frac{1}{2}\left(Q + \sqrt{4 - 3\,Q^2}\right) &= \frac{P\,b^2 - Q\,r_{pl}^2}{b^2 - r_{pl}^2} - \frac{b^2\,(Q - P)}{b^2 - r_{pl}^2} \end{aligned}\right. \tag{17}$$