

Spis treści

1	Elementy Mechaniki Ośrodków Ciągłych	1
1.1	Oznaczenia	1
1.2	Wstęp	2
1.3	Stan odkształcenia	3
1.3.1	Odształcenie ciała. Wektor przemieszczenia	3
1.3.2	Miara odkształcenia	5
1.3.3	Miara prędkości odkształcenia	8
1.3.4	Przypadek małych deformacji	9
1.3.5	Osie główne tensora małych odkształceń	10
1.3.6	Warunki nierozdzielności odkształceń	10
1.4	Stan naprężenia	11
1.5	Prawa zachowania	17
2	Liniowa termosprężystość	22
2.1	Równania konstytutywne dla ciał liniowych sprężystych	22
2.2	Prawo Hooke'a	27
2.3	Energia odkształcania sprężystego	28
2.4	O wpływie temperatury	29
2.5	Równanie Lamégo i równanie Beltramiego-Michella	30
2.6	Najprostsze zadanie	31
2.7	Płaski stan	31
2.7.1	Płaski stan naprężenia (PSN)	31
2.7.2	Płaski stan odkształcenia (PSO)	32
2.7.3	Funkcja naprężenia Airy'ego	34
2.7.4	Podsumowanie	34
2.7.5	Zadanie płaskie we współrzędnych biegunowych r, ϑ	34
3	Sprężysto-plastyczność	35
3.1	Kryterium obciążenia lub odciążenia	36
3.2	Przyrost odkształcenia sprężystego	37
3.3	Przyrost odkształcenia plastycznego	37
3.4	Wzmocnienie plastyczne	37
3.5	Przyrostowy związek naprężenie-odkształcenie	38

1 Elementy Mechaniki Ośrodków Ciągłych

1.1 Oznaczenia

- Tensors: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{n}, \mathbf{v}$.

-

$$(x, y, z) \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow (x_i)$$

- Układ prawoskrętny

- Wektory jednostkowe $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{e}_i$

- Iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = a_k b_k$ (umowa sumacyjna)

- Symbol Kroneckera $\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$
- Symbol permutacyjny

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ tworzą parzystą permutację liczb } 1, 2, 3 \\ -1 & i, j, k \text{ tworzą nieparzystą permutację liczb } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{co najmniej dwa indeksy są równe} \end{cases}$$

- Iloczyn wektorowy $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$
- Iloczyn mieszany $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$. Interpretacja geometryczna: Objętość równoległoscianu bazującego na 3 wektorach.
- Oznaczenie różniczkowania $A_{,i} = \partial A / \partial x_i$
- Operatory: gradient : $\text{grad} \phi = \phi_{,i}$, dywergencja: $\text{div} \mathbf{A} = A_{i,i}$, rot $\mathbf{A} = \epsilon_{ijk} A_{k,j} \mathbf{e}_i$, Laplace'a: $\Delta \phi = \phi_{,ii}$.
- Wzór Ostrogradskiego-Gauss'a

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{A} dV \quad (1)$$

- Pochodna dI/dt , $I = \int_{V(t)} M(\mathbf{x}, t) dV$

$$\frac{dI}{dt} = \int_V \frac{\partial M}{\partial t} dV + \int_S M (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \left[\left(\frac{\partial M}{\partial t} + \text{grad} M \cdot \mathbf{v} \right) + M \text{div} \mathbf{v} \right] dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} M(\mathbf{x}, t) dV = \int_V (\dot{M} + M \text{div} \mathbf{v}) dV \quad (2)$$

1.2 Wstęp

1. Ciało zmienia swój kształt pod wpływem oddziaływań zewnętrznych. Są to: obciążenia powierzchniowe, siły masowe, ogrzanie, oziębienie.

2. Kiedy odkształcenia ciała nie przekracza pewnych granic, to po powolnym usunięciu oddziaływań zewnętrznych, wraca ono do swego pierwotnego kształtu. Opisaną właściwość ciała nazywamy *sprężystością*.

3. Usunięcie oddziaływań zewnętrznych po znacznych deformacjach ciała, nie prowadzi do zniknięcia odkształceń. Pozostaje wówczas pewna końcowa i trwała deformacja ciała. To zjawisko nazywamy *plastycznością*, a trwałe odkształcenia nazywamy *plastycznymi*.

Teoria sprężystości i plastyczności stara się wyjaśnić zmianę stanu mechanicznego i geometrycznego w trakcie jego obciążania.

Określimy wielkości charakteryzujące geometrię odkształceń w trakcie deformacji ciała i wyznaczmy siły wewnętrzne, zwane naprężeniami, a następnie związki między tymi wielkościami.

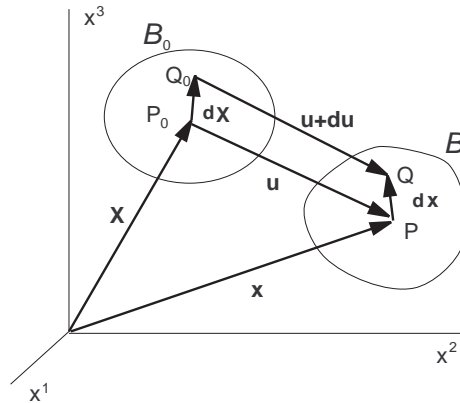
1.3 Stan odkształcenia

1.3.1 Odkształcenie ciała. Wektor przemieszczenia

W chwili $t = t_0$, ciało zajmowało obszar \mathcal{B}_0 , a w chwili t , zajmie obszar \mathcal{B} w wyniku odkształcenia. Punkt P_0 przemieszcza się do punktu P .

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad \text{lub} \quad u_i = x_i - X_i \quad (3)$$

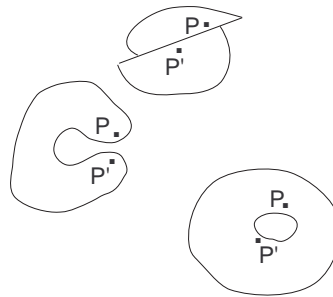
Z założenia ciągłości ośrodka, funkcja:



Rysunek 1: Odkształcenie ciała

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad \text{lub w zapisie indeksowym} \quad x_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (4)$$

jest funkcją ciągłą i jedno-jednoznaczną. Punkty ośrodka położone blisko siebie przed odkształ-



Rysunek 2: Ciągłość ośrodka wyklucza możliwości powstawania szczelin i otworów

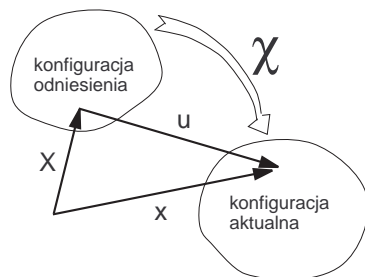
ceniem przechodzą w pobliskie punkty po odkształceniu. Wykluczamy możliwości powstawania w czasie deformacji szczelin i otworów. Warunek taki ma postać:

$$J = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} \right| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| > 0 \quad (5)$$

Odształcenia jednorodne ciała mają postać:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{c} \quad (6)$$

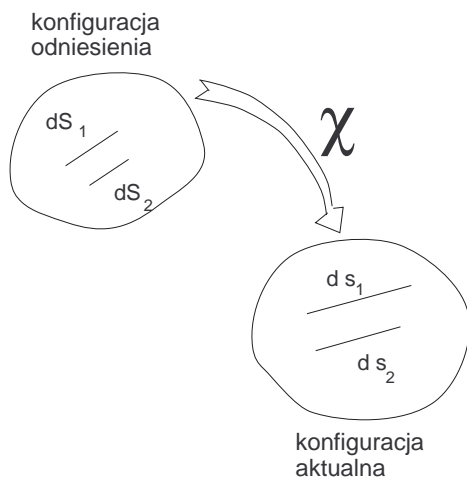
gdzie \mathbf{A} , \mathbf{c} są stałymi tensorowymi, $\det \mathbf{A} > 0$. W przypadku odkształceń jednorodnych, dwie linie proste w konfiguracji odniesienia pozostają prostymi w konfiguracji aktualnej odkształconej oraz



Rysunek 3: Kinematyka

stosunki długości tych linii są stałe. Wszystkie procesy odkształceniowe są jednorodne lokalnie, czyli we wszystkich przypadkach, przyrostowy odcinek ciała podlega rozciągnięciu (albo skróceniu) i obrotowi podczas odkształcenia ciała.

$$\frac{ds_1}{dS_1} = \frac{ds_2}{dS_2} \quad (7)$$



Rysunek 4:

Gradient odkształcenia \mathbf{F} jest definiowany jako odwzorowanie odcinka $d\mathbf{X}$ w konfiguracji odniesienia, na $d\mathbf{x}$ w konfiguracji aktualnej:

$$d\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) \approx \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \equiv \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (8)$$

czyli:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} \quad (9)$$

Przykład 1:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2(e^t - 1) \\ x_2 &= X_1(e^{-t} - 1) + X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}} \\ X_2 &= \frac{x_1(e^t - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}} \\ X_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= X_2(e^t - 1) \\ u_2 &= X_1(e^{-t} - 1) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}} \\ u_2 &= x_2 - \frac{x_1(e^t - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}} \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Przykład 2:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \\ x_2 &= X_2 + AX_3 \\ x_3 &= X_3 + AX_2 \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie $A = \text{const.}$ Mamy $\det \mathbf{F} = 1 - A^2 \neq 0$ kiedy $A \neq \pm 1$. Związki odwrotne:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 \\ X_2 &= \frac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2} \\ X_3 &= \frac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= AX_3 \\ u_3 &= AX - 2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= A \frac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2} \\ u_3 &= A \frac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2} \end{aligned} \quad (17)$$

1.3.2 Miara odkształcenia

Badamy zmianę odległości między bliskimi punktami P_0, Q_0 przed odkształceniem i P, Q po odkształceniu:

$$|P_0Q_0|^2 = dS^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = dX_j dX_j = \delta_{jk} dX_j dX_k = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (18)$$

$$|PQ|^2 = ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i dx_i = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (19)$$

Z równania (4) wynika, że:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (20)$$

zatem:

$$ds^2 - dS^2 = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k - \delta_{jk} dX_j dX_k = 2 E_{jk} dX_j dX_k = d\mathbf{X} (2 \mathbf{E}) d\mathbf{X} \quad (21)$$

gdzie:

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} - \delta_{jk} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (22)$$

Tensor \mathbf{E} nazywamy tensorem odkształcenia Lagrange'a lub Green'a. Opisuje on odkształcenia ciała we współrzędnych Lagrange'a.

Korzystając ze wzoru (3), mamy:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ik} \quad (23)$$

a równania (22) możemy zapisać w postaci:

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \quad (24)$$

lub

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u} \cdot \text{grad} \mathbf{u}) \quad (25)$$

Podobnie, we współrzędnych eulerowskich, mamy tensor odkształcenia:

$$E_{jk}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (26)$$

Przykład:

Zadany ruch jest w opisie Lagrange'a:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + aX_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (27)$$

Wtedy mamy opis Eulera

$$\begin{cases} X_1 = x_1 - ax_2 \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = x_3 \end{cases} \quad (28)$$

Jakobian jest postaci:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (29)$$

Tensor odkształcenia Lagrange'a:

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} - \delta_{jk} \right) = \begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & a^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

W podobny sposób można obliczyć tensor odkształcenia Eulera:

$$E_{jk}^* = \frac{1}{2} \left(\delta_{jk} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) = \begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & -a^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Składowe wektora przesunięcia we współrzędnych Lagrange'a i Eulera:

$$\begin{cases} u_1 = aX_2 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = ax_2 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Możemy obliczyć również np. tensor odkształcenia Lagrange'a według wzoru:

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \quad (33)$$

otrzymujemy identyczny wzór jak (31). W przypadku małych deformacji pomijamy człon $a^2/2$, nie ma różnicy między E_{jk} and E_{jk}^* :

$$\varepsilon_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Wektor prędkości we współrzędnych Lagrange'a:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (35)$$

Niech np. $a = t^2$

$$\begin{cases} v_1 = 2tX_2 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (36)$$

a ten wektor prędkości we współrzędnych Eulera:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \quad (37)$$

Niech np. $a = t^2$

$$\begin{cases} v_1 = 2tx_2 + t^2v_2 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Jest to uwikłany układ, z tego wynika, że:

$$\begin{cases} v_1 = 2tx_2 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (39)$$

bo w tym przypadku $v_2 = 0$. W ogólnym przypadku trzeba będzie rozwiązać układ (39).

Interpretacja geometryczna składowych tensora \mathbf{E} :

Obliczamy względne wydłużenie odcinka PQ :

$$\frac{|\mathbf{PQ}| - |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|}{|\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|} = \frac{ds - dS}{dS} \equiv \lambda_{PQ} \quad (40)$$

Przy $\lambda_{PQ} > 0$ mamy wydłużenie, a przy $\lambda_{PQ} < 0$ - skrócenie. Niech $\nu_i = dX_i/dS$, to

$$\frac{(ds - dS)(ds + dS)}{dS \cdot dS} = \frac{(ds - dS)(ds - dS + 2dS)}{dS \cdot dS} = 2E_{ik} \frac{dX_i}{dS} \frac{dX_k}{dS} \quad (41)$$

$$\lambda_{PQ}(\lambda_{PQ} + 2) = 2E_{ik}\nu_i\nu_k \quad (42)$$

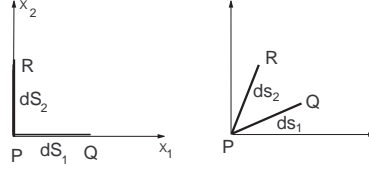
Niech przed odkształceniem dS leży na OX_1 , to $\nu_j = \delta_{1j}$, ($\nu_1 = 1, \nu_2 = \nu_3 = 0$). Z(41) mamy:

$$\lambda_{11}(\lambda_{11} + 2) = 2E_{11} \Rightarrow \lambda_{11} = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 \quad (43)$$

czyli względne wydłużenie elementu liniowego $dS = dX_1$ jest zależne od składowej E_{11} . Niech:

$$P_0Q_0 \parallel X_1, \quad \lambda_{PQ} = \lambda_{11}; \quad \boldsymbol{\nu}^1 = (1, 0, 0), \quad \nu_i^1 = \delta_{1i}$$

$$P_0R_0 \parallel X_2, \quad \lambda_{PR} = \lambda_{22}; \quad \boldsymbol{\nu}^2 = (0, 1, 0), \quad \nu_i^2 = \delta_{2i}$$



Rysunek 5:

$$\nu_i = \frac{dX_i}{dS}, \quad \nu_i^* = \frac{dx_i}{ds}$$

$$x_i = u_i + X_i \Rightarrow dx_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ik} \right) dX_k$$

$$\nu_i^* = \frac{\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ik} \right)}{ds} dX_k = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ik} \right) \frac{dX_k}{dS} \frac{dS}{ds}$$

$$\nu_i^* = \frac{\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ik} \right)}{ds} dX_k = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ik} \right) \frac{\nu_k}{1 + \lambda}$$

$$\cos \varphi_{12} = 0$$

$$\nu_{(1)}^* \cdot \nu_{(2)}^* = \cos \varphi_{12}^* = \frac{2E_{12}}{\sqrt{(1 + 2E_{11})(1 + 2E_{22})}} \quad (44)$$

Sześć składowych E_{ij} charakteryzuje odkształcenia ciała. Jeśli $E_{ij} = 0$, to $\lambda_{PQ} = 0$ oraz $\varphi^* = 0 \Rightarrow$ to znaczy nie następuje odkształcenie ciała.

1.3.3 Miara prędkości odkształcenia

Pole prędkości:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (45)$$

Często musimy obliczać pola prędkości względem położenia ciała po odkształceniu:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\chi}[\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t] \quad (46)$$

Jako miarę prędkości odkształcenia, możemy wziąć względną prędkość dwóch punktów materialnych \mathbf{x} i $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (47)$$

To prowadzi do definicji gradientu prędkości:

$$\mathbf{L} = \text{grad} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (48)$$

Rozkładamy \mathbf{L} na część symetryczną i antysymetryczną:

$$\mathbf{D} = 0.5 (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \Rightarrow \text{tensor prędkości odkształcenia} \quad (49)$$

$$\boldsymbol{\omega} = 0.5 (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \Rightarrow \text{tensor prędkości obrotu} \quad (50)$$

1.3.4 Przypadek małych deformacji

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \text{grad} \mathbf{u} \quad (51)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \frac{1}{2}(\text{grad} \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u}) \quad (52)$$

$$\mathbf{D} \approx \frac{1}{2}(\text{grad} \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (53)$$

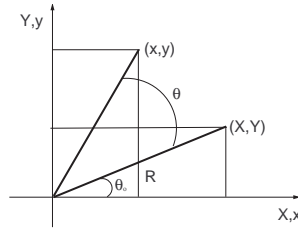
Część antysymetryczną $\text{grad} \mathbf{u}$ nazywamy tensorem obrotu:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\text{grad} \mathbf{u} - \text{grad}^T \mathbf{u}) \quad (54)$$

Uwaga: Z równania (26)

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = e_{jk} + \frac{1}{2} (e_{ij} + \omega_{ij})(e_{ik} - \omega_{ik})$$

czyli $E_{jk} \approx \varepsilon_{jk}$ tylko kiedy ε_{jk} oraz ω_{jk} są małe. Rozpatrzmy przykład skończonego obrotu pręta.



Mamy:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \vartheta_0 & x &= R \cos (\vartheta + \vartheta_0) \\ Y &= R \sin \vartheta_0 & y &= R \sin (\vartheta + \vartheta_0) \end{aligned}$$

Wektor przesunięcia w opisie Lagrange'a ma postać:

$$u(X, Y) = x - X = R \cos(\vartheta + \vartheta_0) - R \cos \vartheta_0 = X (\cos \vartheta - 1) - Y \sin \vartheta$$

$$v(X, Y) = y - Y = X \sin \vartheta + Y (\cos \vartheta - 1)$$

Tensor małych odkształceń w tym przypadku jest postaci:

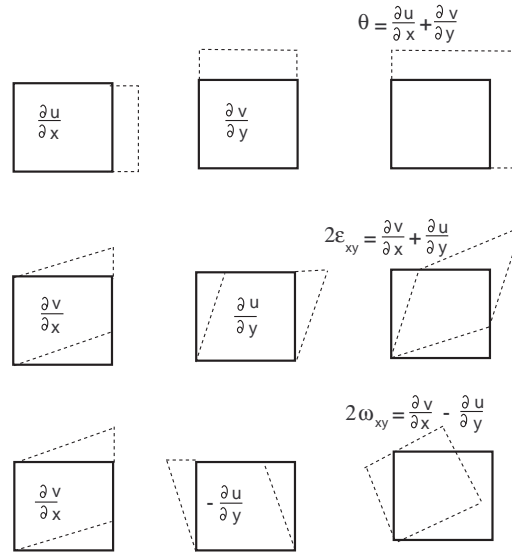
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \cos \vartheta - 1 \\ \varepsilon_{yy} &= \cos \vartheta - 1 \\ \varepsilon_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

i nie może opisać dobrze sztywnego obrotu pręta (nie ma tu odkształcenia, a $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq 0$). Jeżeli obliczymy tensor dużych odkształceń, to on jest równy zeru, np.:

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial X} + (1/2) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 \right] = (\cos \vartheta - 1) + (1/2) [(\cos \vartheta - 1)^2 + \sin^2 \vartheta] = 0$$

Jest to ważne w przypadku belek, powłok, kiedy odkształcenia są małe, ale kąty obrotu są duże.

Interpretacja składowych tensora małych odkształceń i tensora obrotu przedstawiona na rysunku:

Rysunek 6: Interpretacja geometryczna składowych tensora ϵ i ω

1.3.5 Osie główne tensora małych odkształceń

Tensor ϵ jest tensorem symetrycznym drugiego rzędu. Kierunki główne tego tensora znajdujemy z równania:

$$(\epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (55)$$

$$\epsilon^3 - I_\epsilon \epsilon^2 + II_\epsilon \epsilon + III_\epsilon = 0 \quad (56)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \epsilon_{kk} \\ II_\epsilon &= 1/2(\epsilon_{ii}\epsilon_{jj} - \epsilon_{ij}\epsilon_{ji}) \\ III_\epsilon &= \det \epsilon_{ij} = (1/6) \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} \epsilon_{im} \epsilon_{jn} \epsilon_{kp} \end{aligned} \quad (57)$$

Względna zmiana objętości elementu ciała:

$$\frac{\Delta V - \Delta V_0}{\Delta V_0} = \epsilon_{kk} = \text{div} \mathbf{u} \quad (58)$$

Przykład: Znaleźć kierunki i wartości główne tensora:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

1.3.6 Warunki nierozdzielności odkształceń

Motywacja: Kiedy rozwiązujemy zagadnienie początkowo-brzegowe względem naprężenia, to potem musimy obliczyć odkształcenia, by na koniec znaleźć pole przemieszczenia. Nasuwa się pytanie: Czy wszystkie pole odkształcenia mogą być rozwiązaniem pewnego zagadnienia początkowo-brzegowego teorii liniowej sprężystości?

Odpowiedź brzmi "nie". Są pewne więzy pomiędzy składowymi tensora odkształcenia (Sześć składowych ϵ_{ij} wyraża się przez trzy składowe wektora przemieszczenia \mathbf{u} , zatem nie są one niezależne).

$$\epsilon_{phi} \epsilon_{mjk} \epsilon_{ki,hj} = 0 \quad (59)$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem permutacyjnym lub

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{il,jk} - \epsilon_{jk,il} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

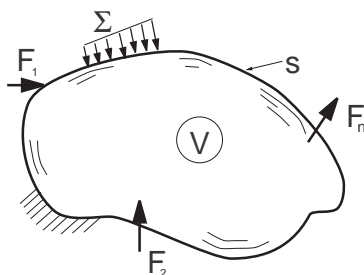
$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

1.4 Stan naprężenia

- Gęstość masy [kg/m^3]

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (62)$$



Rysunek 7: Schemat obciążenia ciała

Ciągły rozkład materii w określonej objętości możemy scharakteryzować za pomocą jednej wielkości skalarnej - gęstości masy.

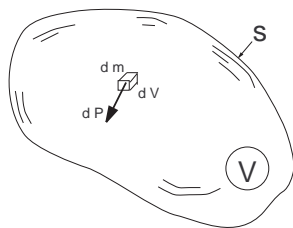
Masa ciała \mathcal{M}

$$\mathcal{M} = \int dm = \int_V \rho dV \quad (63)$$

Kiedy $\rho = const$, ciało jest jednorodne, wówczas $\mathcal{M} = \rho V$.

- Siły zewnętrzne: powierzchniowe i objętościowe (masowe)

Siły zewnętrzne możemy podzielić na:



Rysunek 8: Gęstość

- siły rozłożone na powierzchni (nacisk jednego ciała na drugie lub ciśnienie hydrostatyczne). Są to siły powierzchniowe

- siły rozłożone wewnątrz obszaru ciała: siły grawitacyjne, siły magnetyczne... To są siły masowe.

Na element dm o objętości dV działa siła $d\mathbf{P}$. Siła masowa jest definiowana jako:

$$\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{P}}{dm} \quad (64)$$

a siła objętościowa:

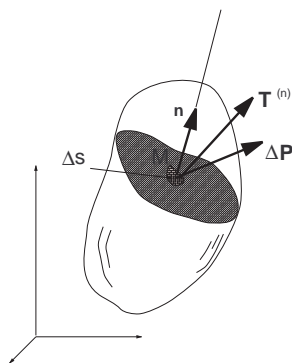
$$\mathbf{b}^* = \frac{d\mathbf{P}}{dV} \quad (65)$$

Na podstawie (62) mamy:

$$\mathbf{b}^* = \rho \mathbf{b} \quad (66)$$

Przykład: Ciało w polu przyciągania ziemskiego $d\mathbf{P} = dm \mathbf{g}$. Wektor \mathbf{g} jest przyspieszeniem ziemskim $g = 9,81 m/s^2$. Siła masowa $\mathbf{b} = \mathbf{g}$. Siła objętościowa $\mathbf{b}^* = \rho \mathbf{g}$.

- Siły wewnętrzne. Wektor naprężenia



Rysunek 9: Wektor naprężenia

Podzielmy bryłę na dwie części przy pomocy pewnej powierzchni (Rys.9). W punkcie M wstawiamy wektor normalny \mathbf{n} skierowany na zewnątrz. Wzajemne oddziaływania obu części ciała na powierzchni podziału mają charakter sił powierzchniowych. Wypadkowe oddziaływania sił w otoczeniu powierzchniowym ΔS punktu M oznaczamy symbolem $\Delta\mathbf{P}$, zaś gęstość powierzchniową tych sił nazywamy wektorem naprężenia $\mathbf{T}^{(n)}$ w punkcie M:

$$\mathbf{T}^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta S} \quad (67)$$

- **Naprężenia normalne i styczne**

W ogólnym przypadku wektor naprężenia $\mathbf{T}^{(n)}$ nie jest kolinearny z wektorem \mathbf{n} , więc możemy rozłożyć go na składowe:

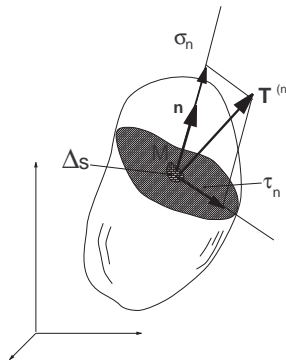
$$\mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n \quad (68)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}_n$ jest naprężeniem normalnym, a $\boldsymbol{\tau}_n$ jest naprężeniem stycznym. Wiemy, że:

$$\sigma_n = \mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{n} = T_i^{(n)} n_i \quad (69)$$

a naprężenie styczne:

$$\tau_n = \sqrt{\mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{T}^{(n)} - (\sigma_n)^2} \quad (70)$$



Rysunek 10: Naprężenie normalne i styczne

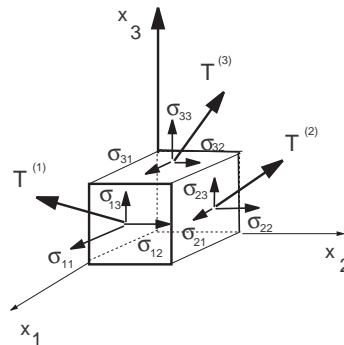
- **Twierdzenie Cauchy'ego**

Obierając dowolną powierzchnię przechodzącą przez punkt M o kierunku \mathbf{n} otrzymamy za każdym razem inny wektor naprężenia, odpowiadający obranej powierzchni. Kiedy znamy zbiór wektorów \mathbf{T}^n , mówimy, że znamy stan naprężenia w punkcie M .

Można pokazać, że stan naprężenia jest określony przez trzy wektory $\mathbf{T}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), odpowiadające trzem wersorom \mathbf{e}_i

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}^{(i)} n_i \quad (71)$$

Inaczej mówiąc, kiedy znane są trzy wektory naprężenia na trzech wzajemnie prostopadłych



Rysunek 11: Tensor naprężenia

powierzchniach, znamy wektor naprężenia dla dowolnego kierunku \mathbf{n} .

Tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j \quad (72)$$

Przykład: Tensor naprężenia w punkcie M ciała ma postać

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} (MPa) \quad (73)$$

Obliczyć wektor naprężenia, jego moduł, kąt między $\mathbf{T}^{(n)}$ i \mathbf{n} , naprężenie normalne i styczne dla kierunku $\mathbf{n} = (2/3, -2/3, -1/3)$

Rozwiązanie: Wartości główne: $\sigma_I = 8, \sigma_{II} = 5, \sigma_{III} = 3 (MPa)$, $\mathbf{T}^{(n)} = (4, -10/3, 0)(MPa)$, $\sigma_n = 44/9 MPa$, moduł = $5, 2 MPa$, $\cos \theta \approx 0.94$; $\theta \approx 20^\circ$

• **Naprężenia główne. Kierunki główne tensora naprężenia. Niezmienniki.**

Kierunki \mathbf{n} w punkcie M badanego ciała, dla których wektory naprężenia są współliniowe z nimi, nazywamy kierunkami głównymi, a odpowiadające im naprężenia - naprężeniami głównymi. Warunek współliniowości tych wektorów ma postać:

$$\mathbf{T}^{(n)} = \sigma \mathbf{n} \quad (74)$$

Z (72) wynika, że:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \sigma \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{1}) \mathbf{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (75)$$

Jest to układ trzech równań algebraicznych jednorodnych ze względu na składowe wektora \mathbf{n} . Ponieważ $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, układ ma niezerowe rozwiązanie. Takie rozwiązanie istnieje wtedy, gdy wyznacznik charakterystyczny:

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0 \quad (76)$$

$$\sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + II_\sigma \sigma - III_\sigma = 0 \quad (77)$$

gdzie współczynniki $I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$ są funkcjami składowych tensora naprężenia:

$$I_\sigma = \sigma_{ii}$$

$$II_\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{vmatrix} \quad (78)$$

$$III_\sigma = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} \sigma_{ip} \sigma_{jq} \sigma_{kr} = \det(\sigma_{ij})$$

$I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$ nazywamy niezmiennikami tensora naprężenia.

Równanie (77) ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Każdemu pierwiastkowi σ_k odpowiada jeden kierunek $\mathbf{n}^{(k)}$, czyli kierunek główny. Wynika z tego, że w każdym punkcie istnieją trzy kierunki główne.

Na kierunkach głównych:

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ II_\sigma &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ III_\sigma &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (79)$$

Przykład: Tensor naprężenia

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} (MPa) \quad (80)$$

Równanie $\sigma^3 - 3\sigma^2 - 6\sigma + 8 = \sigma^3 + 2^3 - 3\sigma(\sigma + 2) = (\sigma + 2)(\sigma - 4)(\sigma - 1) = 0$, $\sigma_I = 4$, $\sigma_{II} = 1$, $\sigma_{III} = -2$ (MPa)

$$\mathbf{n}^{(1)} = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

$$\mathbf{n}^{(2)} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$$

$$\mathbf{n}^{(3)} = (-2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$$

• **Rozkład tensora naprężenia**

Średnia wartość składowych naprężeń normalnych

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (81)$$

nazywana jest ciśnieniem hydrostatycznym. Tensor $p\delta_{ij}$ nazywany jest tensorem kulistym lub częścią izotropową tensora naprężenia

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (82)$$

Część tensora naprężenia pozostała po odjęciu części izotropowej nazywamy dewiatorem naprężenia $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$:

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{pmatrix} \quad (83)$$

Możemy wyznaczyć kierunki główne dewiatora. Spełniają one równania:

$$(s_{ij} - s\delta_{ij})n_j = 0 \quad (84)$$

a równanie charakterystyczne ma postać:

$$s^3 - II_s s - III_s = 0 \quad (85)$$

gdzie niezmienniki wyrażają się następująco:

$$I_s = s_{ii}$$

$$II_s = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \quad (86)$$

$$III_s = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \det(s_{ij})$$

Kierunki główne dewiatora pokrywają się z kierunkami głównymi tensora naprężenia. Na kierunkach głównych:

$$\begin{aligned} I_s &= s_1 + s_2 + s_3 = 0 \\ II_s &= -(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) \\ III_s &= s_1 s_2 s_3 \end{aligned} \quad (87)$$

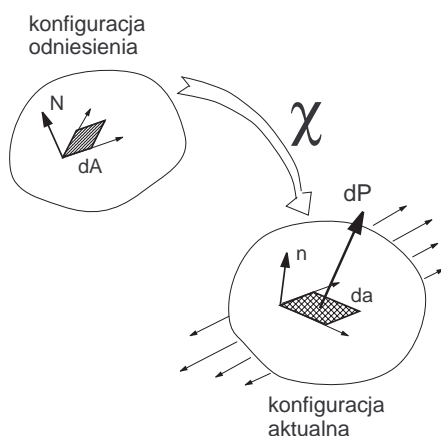
$$I_s = 0$$

$$II_s = \frac{1}{3} (I_\sigma^2 - 3 II_\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (88)$$

$$III_s = \frac{1}{27} (2 I_\sigma^3 - 9 I_\sigma II_\sigma + 27 III_\sigma)$$

Inne tensory naprężenia

W konfiguracji odniesienia mamy: gęstość ϱ_0 , siłę objętościową \mathbf{b}_0 , element powierzchni dA . W konfiguracji aktualnej: gęstość ϱ , siłę objętościową \mathbf{b} , element powierzchni da . \mathbf{N} jest wektorem jednostkowym normalnym do dA , zaś \mathbf{n} jest wektorem jednostkowym normalnym do da . Wiemy, że:



Rysunek 12:

$$\begin{aligned} J &= \det \mathbf{F} \\ \mathbf{b}_0 &= J \mathbf{b} \\ \varrho_0 &= J \varrho \\ \mathbf{n} da &= J \mathbf{N} \mathbf{F}^{-1} dA \end{aligned} \quad (89)$$

Mamy różne definicje naprężeń:

$$\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{P}}{da} \quad (90)$$

\Rightarrow tensor naprężenia Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{N} \mathbf{S} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{P}}{dA} \quad (91)$$

\Rightarrow tensor naprężenia Pioli Kirchhoff'a 1-ego rodzaju $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{N} \boldsymbol{\pi} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{P}}{dA} \quad (92)$$

\Rightarrow tensor naprężenia Pioli Kirchhoff'a 2-ego rodzaju $\boldsymbol{\pi} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$

Interpretacje fizyczne różnych tensorów naprężenia:

- *- Składowe tensora naprężenia Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$ to siły aktualne przypadające na jednostkę pola odkształconego ciała.
- *- Składowe tensora naprężenia Pioli Kirchhoff'a 1-go rodzaju (nominalnych) \mathbf{S} to siły aktualne na jednostkę pola nie odkształconego ciała.
- *- Nie ma prostych interpretacji dla tensora Pioli Kirchhoff'a 2-go rodzaju.

Te tensory naprężenia są odpowiednio uogólnionymi siłami dla uogólnionych miar odkształcenia \mathbf{D} , \mathbf{F} oraz \mathbf{E} , to znaczy:

$$\dot{W} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (93)$$

W przypadku małych deformacji: $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \text{grad} \mathbf{u}$, $\det \mathbf{F} \approx 1 + \text{div} \mathbf{u}$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \frac{\mathbf{1}}{1 + \text{div} \mathbf{u}} (\mathbf{1} + \text{grad} \mathbf{u}) \mathbf{S} = \frac{\mathbf{1}}{1 + \text{div} \mathbf{u}} (\mathbf{1} + \text{grad} \mathbf{u}) \boldsymbol{\pi} (\mathbf{1} + \text{grad} \mathbf{u})^T$$

zatem:

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{S} \approx \boldsymbol{\pi} \quad (94)$$

1.5 Prawa zachowania

Wszystkie globalne prawa zachowania mają postać:

$$\frac{dI}{dt} = \int_V f dV + \int_S g dS \quad (95)$$

gdzie: $I = \int_V M(\mathbf{x}, t) dV$. Funkcje M, f są określone na V , funkcja g jest określona na S .

- Zachowanie masy, równanie ciągłości:

W tym przypadku $M = \rho$. Całka $\int_V \rho dV$ jest masą całego ciała. We wzorze (95) $f = g = 0$.

Korzystając ze wzoru (1.1) otrzymamy globalną zasadę zachowania masy:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (96)$$

stąd mamy lokalną zasadę:

$$\dot{\rho} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (97)$$

- Zachowanie pędu, równanie ruchu:

Teraz $M = \rho \mathbf{v}$ jest pędem (\mathbf{v} jest prędkością punktu). Prawa strona (95) jest sumą sił objętościowych i powierzchniowych, zaś $f = \rho \mathbf{F}$, $g = \mathbf{T}^{(n)}$. Wówczas globalna zasada zachowania pędu:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{T}^{(n)} dS \quad (98)$$

$$\int_V \left(\frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} + (\rho \mathbf{v}) \text{div} \mathbf{v} \right) dV = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) dS$$

$$\dot{\rho} \mathbf{v} + \rho \dot{\mathbf{v}} + (\rho \mathbf{v}) \text{div} (\mathbf{v}) = \rho \mathbf{b} + \text{div} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\underbrace{(\dot{\rho} + \rho \text{div} \mathbf{v}) \mathbf{v}}_0 + \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} + \text{div} \boldsymbol{\sigma}$$

czyli lokalna zasada jest postaci:

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (99)$$

Uwaga: Równania ruchu dla różnych miar naprężeń ($\mathbf{b}^* = \varrho \mathbf{b}$: siła objętościowa w konfiguracji aktualnej):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}^* &= \varrho \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_X = \varrho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_x + \varrho \mathbf{v} \operatorname{grad}_x \mathbf{v} \\ \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{b}_0^* &= \varrho_0 \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_X \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^T) + \mathbf{b}_0^* &= \varrho_0 \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_X\end{aligned}\quad (100)$$

- Zachowanie momentu pędu (krętu) \rightarrow Tensor naprężenia jest symetryczny, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$

Niech $M = \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v}$ będzie momentem pędu względem punktu O , zaś $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$. $f = \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b}$, $g = \mathbf{r} \times \mathbf{T}^{(n)}$ są momentami odpowiednich sił względem punktu O . Globalna zasada zachowania momentu pędu ma postać:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{T}^{(n)} dS \quad (101)$$

Pokażemy, że z powyższego równania otrzymuje się symetryczność tensora naprężenia:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v} dV &= \int_V \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) dS \\ (\mathbf{v} \times \varrho \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times (\varrho \dot{\mathbf{v}}) + (\mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T) + \mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{r} \times (\varrho \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T) + \mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{r} \times \dot{\varrho} \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \varrho \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T) + \mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \\ \underbrace{\mathbf{r} \times \dot{\varrho} \mathbf{v} + (\mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v}}_0 &= (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T) + \underbrace{\mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} - \mathbf{r} \times \varrho \dot{\mathbf{v}}}_0\end{aligned}$$

stąd lokalna zasada zachowania momentu pędu daje:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

Inny dowód w indeksach: główny moment wszystkich sił działających na ciele jest równy zeru:

$$\begin{aligned}\int_V \varepsilon_{ijk} x_j b_k^* dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j T_k^{(n)} dS &= 0 \\ \int_V \varepsilon_{ijk} x_j b_k^* dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j (\sigma_{lk} n_l) dS &= 0 \\ \int_V \varepsilon_{ijk} x_j b_k^* dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk,l} dV &= 0 \\ \int_V \varepsilon_{ijk} [x_j (\sigma_{lk,l} + b_k^*) + \delta_{jl} \sigma_{lk}] dV &= 0 \\ \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} &= 0\end{aligned}$$

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$$

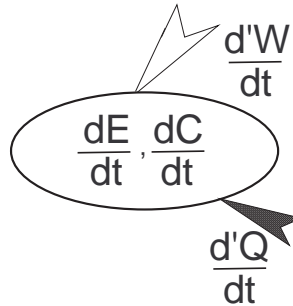
Uwaga: Dla innych miar naprężenia

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\ (\mathbf{FS}) &= (\mathbf{FS})^T \\ \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\pi}^T \end{aligned} \quad (102)$$

- Zachowanie energii (pierwsze prawo termodynamiki)

Niech u będzie energią wewnętrzną na jednostkę masy. $M = \rho(u + 1/2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ jest sumą energii wewnętrznej i kinetycznej ciała. $f = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ jest mocą sił objętościowych, a $g = g_1 + g_2$. Tu $g_1 = \mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{v}$ jest mocą sił powierzchniowych a $g_2 = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ jest prędkością ciepła doprowadzonego do ciała z otoczenia przez powierzchnię, gdzie \mathbf{q} jest wektorem strumienia ciepła, $[q] = [J/m^2 s]$. Globalna postać zasady zachowania energii ma postać:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV}_{\frac{dE}{dt} + \frac{dC}{dt}} = \underbrace{\int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{v} dS}_{\frac{d'W}{dt}} - \underbrace{\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS}_{\frac{d'Q}{dt}} \quad (103)$$



Rysunek 13: Pierwsze prawo termodynamiki

$\rho \dot{u} + \dot{\rho} u + \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \dot{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + (\rho u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q}$
po skróceniu otrzymamy lokalną postać pierwszego prawa termodynamiki:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (104)$$

gdzie \mathbf{D} jest tensorem prędkości odkształcenia

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad}^T \mathbf{v}) \quad (105)$$

Prędkość zmiany energii wewnętrznej ciała równa się sumie mocy naprężenia oraz przepływu ciepła z otoczenia.

Uwaga: Moc sił zewnętrznych dla różnych miar naprężeń

Z równania ruchu:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$$

mnożymy obie strony przez v_i :

$$\sigma_{ij,j} v_i + \rho b_i v_i = \rho \dot{v}_i v_i$$

$$(\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j} + \rho b_i v_i = \rho \dot{v}_i v_i$$

Całkujemy:

$$\int_V \sigma_{ij} v_j dV - \int_V (\sigma_{ij} D_{ij}) dV + \int_V \rho b_i v_i dV = \int_V \rho \dot{v}_i v_i dV$$

$$\dot{W} \equiv \int_S \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{v} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} \mathbf{D} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dV$$

zatem:

$$\dot{W} = \int_V (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}) dV + \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (106)$$

$$W = \int_{V_0} (\mathbf{S} \dot{\mathbf{F}}) dV + \frac{d}{dt} \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (107)$$

$$W = \int_{V_0} (\boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{E}}) dV + \frac{d}{dt} \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (108)$$

- Drugie prawo termodynamiki.

Pierwsze prawo termodynamiki mówi, że praca i ciepło są równoważne w sensie Joule (dana ilość pracy wytwarza taką samą ilość ciepła). Jednak w rzeczywistych procesach termodynamicznych zawsze występuje dysypacja. Całkowita energia zostaje zachowana ale pewna jej część ulegnie rozproszeniu w postaci ciepła do otoczenia. Praca może być przekształcona w ciepło, ale ze względu na dysypacji, odwrotny proces nie jest możliwy. Rzeczywisty proces termodynamiczny jest nieodwracalny mimo że energia w nim jest zachowana (np. wewnętrzne tarcia - energia kinetyczna zamieniona na ciepło, przewodzenie ciepła- rozpraszanie energii do otoczenia...). Drugie prawo termodynamiki mówi, że energia ma jakość. Wprowadzamy pewną wielkość fizyczną, zwaną entropią, która wyraża różnicę między użytecznymi przemianami energii a energią rozpraszaną, bezpowrotnie traconą.

Postuluje się istnienie dwóch funkcji:

- Temperatura absolutna T ($T > 0$)
- Entropia S , lub entropia właściwa s

$$S = \int_V \rho s dV \quad (109)$$

Entropia zmienia się przez oddziaływania ciała z otoczeniem oraz zmiany zachodzące wewnątrz ciała:

$$dS = dS^{(e)} + dS^{(i)} \quad (110)$$

gdzie:

$$ds^{(e)} = \frac{dQ}{T} \quad (111)$$

$$dS^{(i)} \geq 0 \quad dS^{(i)} = 0 \text{ dla procesu odwracalnego} \quad (112)$$

czyli:

$$dS^{(i)} = dS - dS^{(e)} \geq 0 \quad (113)$$

stąd po wstawieniu:

$$\frac{dS}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} \geq 0 \quad (114)$$

Jest to nierówność Clausiusa-Duhema.

Przykład: Niech system składa się z dwóch części, z temperaturami T_1 i T_2 . W procesie przewodnictwa, pewna ilość ciepła przechodzi z części pierwszej do części drugiej. Entropia pierwszej części zmniejsza się o $dS_1 = -dQ/T_1$, a entropia części drugiej zwiększa się o $dS_2 = dQ/T_2$. Entropia całego systemu teraz wynosi

$$dS = dQ(1/T_2 - 1/T_1) \geq 0$$

stąd $T_1 > T_2$, czyli ciepło przechodzi z ciała o wyższej temperatury do ciała o niższej temperaturze.

Z (114) mamy globalną drugą zasadę termodynamiki:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV + \int_S \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS = \int_V \rho \dot{s} dV + \int_S \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \geq 0 \quad (115)$$

Korzystając ze wzoru Ostrogradskiego-Gaussa:

$$\int_V \rho \dot{s} dV + \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) dV \geq 0 \quad (116)$$

otrzymamy lokalne drugie prawo termodynamiki w postaci:

$$\rho \dot{s} + \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (117)$$

$$\rho \dot{s} + \frac{1}{T} q_{i,i} - \frac{1}{T^2} q_i T_{,i} \geq 0$$

Z (104) mamy $q_{i,i} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{u}$. Wstawimy to do drugiego prawa termodynamiki otrzymamy:

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho (\dot{u} - T \dot{s})}_{\text{nieodwracalność mechaniczna}} - \underbrace{\frac{1}{T} q_i T_{,i}}_{\text{nieodwracalność termiczna}} \geq 0 \quad (118)$$

Oznaczmy przez $\mathcal{D} = \sigma_{ij} D_{ij} - \rho (\dot{u} - T \dot{s})$ oraz $\varphi = u - Ts$. \mathcal{D} jest *dysypacją energii mechanicznej* a φ jest nazywana *energiją swobodną*. Zwykle rozkładamy $\sigma_{ij} D_{ij} = \sigma_{ij} D_{ij}^e + \sigma_{ij} D_{ij}^p$, a energia swobodna jest funkcją:

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \kappa) \quad (119)$$

gdzie $\varepsilon_{ij}^e = D_{ij}^e$, zaś κ jest tzw. parametrem wzmocnienia wewnętrznego.

$$\dot{\varphi} = \dot{u} - T \dot{s} - s \dot{T}$$

$$\dot{u} - T \dot{s} = \dot{\varphi} + s \dot{T}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \varepsilon_{ij}^{\dot{e}} + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa} \dot{\kappa}$$

stąd

$$s = -\frac{\partial \varphi}{\partial T} \quad \sigma_{ij} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

oraz

$$\mathcal{D} = \sigma_{ij} D_{ij}^p + \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa} \dot{\kappa}$$

Przewodnictwo ciepłe w ciałach izotropowych spełnia prawo przewodnictwa Fouriera:

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T \quad (120)$$

gdzie k jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego ($[k] = [J/(m K s)]$). $k > 0$ bo ciepło zawsze przepływa z obszaru o wyższej temperaturze do obszaru o niższej temperaturze.

Niech c_v będzie ciepłem właściwym przy stałym odkształceniu (o wymiarze $[c] = [J/(kg K)]$) to równanie kalorymetryczne przyjmuje postać:

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \rho c_v \dot{T} \quad (121)$$

Wszystkie równania grupujemy w tablicy.

Mechanika ośrodków ciągłych		Nowe niewiadome	Ilość niewiadom.	Ilość równań
Związki kinematyczne	$\dot{u}_i = v_i$	u_i, v_i	6	3
Związki kinematyczne	$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$	ε_{ij}	6	6
Związki kinematyczne	$D_{ij} = 1/2(v_{i,j} + v_{j,i})$	D_{ij}	6	6
Równanie ciągłości	$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0$	ρ	1	1
Równanie ruchu	$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$	σ_{ij}	6	3
I prawo termodynamiki	$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} D_{ij} - q_{i,i}$	u, q_i	4	1
II prawo termodynamiki	$\rho \dot{s} + \frac{1}{T} q_{i,i} - \frac{1}{T^2} q_i T_{,i} \geq 0$	s, T	2	1
Prawo Fouriera	$q_i = -k T_{,i}$			3
Równanie kaloryczne	$-q_{i,i} = \rho c_v \dot{T}$			1
<i>31 niewiadomych, 25 równań</i>			31	25
Związki fizyczne	$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}, T)$			6
<i>31 niewiadomych, 31 równań</i>			31	31

Do zamknięcia tego układu brakuje nam sześciu równań. Równania te łączą ze sobą stan naprężenia i stan odkształcenia:

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (122)$$

i zależą one od konkretnego materiału. Równania (122) nazwiemy *związkami fizycznymi* lub *równaniami konstytutywnymi*. Jest to odpowiedź materiału na działające obciążenia mechaniczne i termiczne.

2 Liniowa termosprężystość

2.1 Równania konstytutywne dla ciał liniowych sprężystych

Cel: znaleźć związek między $\boldsymbol{\sigma}$ i \mathbf{E} . Ogólnie związek ten wyprowadzamy dla przypadku dużych odkształceń.

Założenie 1 (Działanie lokalne): Naprężenia w punkcie X zależą tylko od deformacji w małym otoczeniu punktu X . Musimy zatem tylko badać przypadek odkształcania jednorodnego.

Założenie 2 (Równanie stanu): Stan jest kompletnie określony kiedy znamy odkształcenie \mathbf{E} i temperaturę T .

Wniosek: istnieje funkcja właściwej energii wewnętrznej $u(\mathbf{E}, s)$ gdzie s jest właściwą entropią. Funkcje $u(\mathbf{E}, s)$ i $s(\mathbf{E}, T)$ opisują kompletnie materiał. Możemy również wprowadzić energię swobodną $\varphi = u - Ts$. Znając u lub φ , mamy związek między $\boldsymbol{\pi}$ i \mathbf{E} .

- Izotermiczny proces: Rozpatrzmy proces $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + d\mathbf{E}$, $s \rightarrow s + ds$

$$du = \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{E}} \right|_{s=\text{const}} d\mathbf{E} + \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{E=\text{const}} ds \quad (123)$$

Przypomnijmy, że pierwsze prawo termodynamiki:

$$\varrho_0 du = dW + dQ.$$

$dW = \boldsymbol{\pi} \cdot d\mathbf{E}$ jest praca wykonana nad ciałem na jednostkę objętości, dQ ilością ciepła pobranego z otoczenia. Z drugiego prawa termodynamiki $dQ = \varrho_0 T ds$. Stąd:

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}, s) = \varrho_0 \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{E}} \right|_{s=\text{const}} \quad T = \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{E=\text{const}} \quad (124)$$

- Izentropowe proces (entropia jest stała, wtedy $\text{div} \mathbf{q} = 0$. Proces izentropowy jest procesem lokalnie adiabatycznym): jest to proces $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + d\mathbf{E}$, $T \rightarrow T + dT$. Wówczas mamy:

$$d\varphi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{T=\text{const}} d\mathbf{E} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial T} \right|_{E=\text{const}} dT \quad (125)$$

Teraz $d\varphi = du - Tds - sdT$, stąd:

$$d\varphi = \frac{1}{\varrho_0} dW + Tds - Tds - sdT = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\pi} \cdot d\mathbf{E} - sdT \quad (126)$$

zatem:

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}, T) = \varrho_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{T=\text{const}} \quad s = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial T} \right|_{E=\text{const}} \quad (127)$$

Podsumowując, mamy dwie alternatywne relacje dla naprężenia:

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}, s) = \varrho_0 \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{E}} \right|_{s=\text{const}} \quad \boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}, T) = \varrho_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{T=\text{const}} \quad (128)$$

- Linearyzacja relacji (128): Zakładamy, że \mathbf{E} jest małe oraz w konfiguracji odniesienia jest wolne od naprężeń. Rozwinięcie powyższego wzoru w szereg Taylor'a daje:

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(\mathbf{E}, s) &= \left. \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial E_{kl}} \right|_{s=\text{const}} E_{kl} + \left. \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial s} \right|_{E=\text{const}} ds \\ \pi_{ij}(\mathbf{E}, T) &= \left. \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial E_{kl}} \right|_{T=\text{const}} E_{kl} + \left. \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial T} \right|_{E=\text{const}} dT \end{aligned} \quad (129)$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^a &= \left. \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial E_{kl}} \right|_{s=\text{const}} = \varrho_0 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \right|_{s=\text{const}} && \text{adiabatyczne moduły sprężyste} \\ C_{ijkl}^i &= \left. \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial E_{kl}} \right|_{T=\text{const}} = \varrho_0 \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \right|_{T=\text{const}} && \text{izotermiczne moduły sprężyste} \end{aligned} \quad (130)$$

oraz:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \left. \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial s} \right|_{s=\text{const}} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|_{s=\text{const}} \\ a_{ij} &= \left. \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial T} \right|_{T=\text{const}} = \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \right|_{T=\text{const}} \end{aligned} \quad (131)$$

otrzymamy wówczas prawo Hooke'a.

- Funkcje u oraz φ są dodatnio określone.
- Symetria

- $C_{ijkl} = C_{jikl}$ ponieważ $\pi_{ij} = \pi_{ji}$
- $C_{ijkl} = C_{klij}$ ponieważ $\frac{\partial^2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial^2}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}}$
- $C_{ijlk} = C_{jikl}$ ponieważ mamy (1) i (2).

Wniosek: C_{ijl} ma 21 niezależnych składowych.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{1223} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{1131} & C_{2231} & C_{3331} & C_{1231} & C_{2331} & C_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (132)$$

Jeżeli materiał ma jedną płaszczyznę symetrii, niech na przykład Ox_2x_3 jest tą płaszczyzną. Wykonujemy taką zmianę układu współrzędnych:

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3$$

wtedy w nowym układzie składowe wektora przemieszczenia wynoszą:

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = u_2, \quad u'_3 = u_3$$

Dla tensora odkształcenia: $\varepsilon'_{21} = -\varepsilon_{21}$, $\varepsilon'_{31} = -\varepsilon_{31}$ a pozostałe- bez zmiany. Przy takiej zmianie układu, tensor naprężenia się nie zmienia ze względu na symetrię. Ze wzorów naprężenia w nowym układzie mamy przykładowo:

$$\begin{aligned} \sigma'_{33} &= C_{1133}\varepsilon'_{11} + C_{2233}\varepsilon'_{22} + C_{3333}\varepsilon'_{33} + 2C_{3312}\varepsilon'_{12} + 2C_{3323}\varepsilon'_{23} + C_{3331}\varepsilon'_{31} \\ \sigma'_{33} &= C_{1133}\varepsilon_{11} + C_{2233}\varepsilon_{22} + C_{3333}\varepsilon_{33} - 2C_{3312}\varepsilon_{12} + 2C_{3323}\varepsilon_{23} - 2C_{3331}\varepsilon_{31} \end{aligned}$$

Z drugiej strony:

$$\sigma_{33} = C_{1133}\varepsilon_{11} + C_{2233}\varepsilon_{22} + C_{3333}\varepsilon_{33} + 2C_{3312}\varepsilon_{12} + 2C_{3323}\varepsilon_{23} + C_{3331}\varepsilon_{31}$$

Ponieważ $\sigma'_{33} = \sigma_{33}$, musimy mieć $C_{3312} = C_{3331} = 0$. W ten sam sposób można pokazać, że:

$$C_{1112} = C_{1113} = C_{2212} = C_{2213} = C_{3312} = C_{3313} = 0$$

Mamy więc teraz tylko 13 stałych niezależnych.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & C_{1123} & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & C_{2223} & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & C_{3323} & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (133)$$

Dla materiału ortotropowego, który ma 3 ortogonalne osie symetrii, mamy tylko 9 stałych:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & (symetria) & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (134)$$

- Małe deformacje:

$$\pi_{ij} \approx \sigma_{ij} \quad E_{kl} \approx \varepsilon_{kl} \quad T = T_0 + \Delta T \quad s = s_0 + \Delta s$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^i \varepsilon_{kl} + b_{ij} \Delta T \quad (135)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^a \varepsilon_{kl} + a_{ij} \Delta s \quad (136)$$

Możemy mierzyć C_{ijkl}^i lub C_{ijkl}^a w warunkach izotermicznych lub adiabatycznych. Jednak różnice są małe i zwykle je pomijamy.

Możemy wyprowadzić związki odwrotne. Są one postaci:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T \quad (137)$$

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} + \beta_{ij} \Delta s \quad (138)$$

C_{ijkl} - tensor modułów sprężystych. C_{ijkl}^{-1} - tensor podatności. α_{ij} - współczynnik rozszerzalności termicznej.

- Energia odkształcenia: Powyższe równania mają ważną konsekwencję. Dla ciał liniowo-sprężystych, istnieje funkcja Φ taka, że

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (139)$$

oraz możemy pokazać, że:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (140)$$

- Dla ciał izotropowych, tensor C_{ijkl} ma postać

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (141)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (142)$$

a prawo Hooke'a:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (143)$$

- Relacja między stałymi sprężystymi.

– Ściskanie hydrostatyczne: Jeżeli $\sigma_{ij} = -\sigma_m \delta_{ij}$, to stosunek $\sigma_m / (-\epsilon_{kk}) \equiv K$, stąd:

$$K = \lambda + 2/3 \mu$$

. K jest modułem sprężystości objętościowej.

– Proste ściskanie: Jeżeli $\sigma_{11} = -f_c$, a pozostałe $\sigma_{ij} = 0$, to stosunek $\sigma_{11}/\epsilon_{11} = E$ nazywana modułem Young'a:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\mu + \lambda}$$

Stosunek $-\epsilon_{22}/\epsilon_{11} = \nu$ nazywamy współczynnikiem Poisson'a:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

– Czyste ścinanie: Jeżeli tylko $\sigma_{12} = \sigma_{21} \neq 0$ a pozostałe składowe są równe zeru, to stosunek $\sigma_{12}/2\epsilon_{12} = G$ nazywamy modułem sprężystości przy ścinaniu. Mamy wówczas:

$$G = \mu$$

- Organizacja nałożone na stałe sprężyste.

Przypominamy, że $\Phi = 0.5 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} > 0$ dla wszystkich $\epsilon_{ij} \neq 0$. Korzystając z prawa Hooke'a, możemy wyrazić Φ poprzez niezmienniki tensora naprężenia:

$$\Phi = \frac{1}{2E} [I_\sigma^2 - 2(1 + \nu)II_\sigma] \quad (144)$$

więc w układzie kierunków głównych mamy:

$$\Phi = \frac{1}{2E} [(1 + \nu)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2] \quad (145)$$

lub:

$$\Phi = \frac{1}{2E} \{ (1 + \nu)[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + (1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \} \quad (146)$$

Ze wzoru (145)

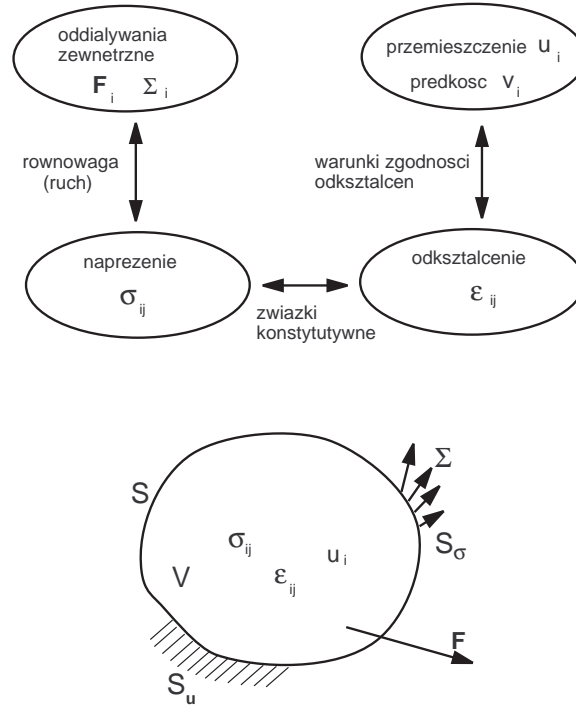
$$\sigma_1 = -1; \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad \Phi > 0 \Rightarrow E > 0$$

$$\sigma_1 = -(\sigma_2 + \sigma_3) = 1; \quad \Phi > 0 \Rightarrow 1 + \nu > 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1; \quad \Phi > 0 \Rightarrow 1 - 2\nu > 0$$

oraz jeśli: $E > 0$, $1 - 2\nu > 0$, $(1 + \nu) > 0$, to z (146) mamy $\Phi > 0$.

- Zagadnienia brzegowe i początkowe: Ciało zajmuje obszar V z brzegiem $S = S_u + S_\sigma$. Dane są C_{ijkl} , gęstość ρ i siły objętościowe \mathbf{b} . Znaleźć pole przemieszczenia \mathbf{u} , odkształcenia $\boldsymbol{\epsilon}$ i naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, które spełniają równanie ruchu w obszarze V , warunki początkowe $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{X})$; $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{X})$ dla V oraz warunki brzegowe: $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{X}, t)$ na S_u oraz $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma}$ na S_σ .



Rysunek 14:

2.2 Prawo Hooke'a

Rozkładamy tensor odkształcenia na 2 części:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(\sigma)} + \varepsilon_{ij}^{(T)} \quad (147)$$

gdzie:

- $\varepsilon_{ij}^{(\sigma)}$ - odkształcenie spowodowane przez pole naprężeń.
- $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ - odkształcenie spowodowane przez pole temperatury.

Dla materiału izotropowego, prawo Hooke'a ma postać:

$$\varepsilon_{ij}^{(\sigma)} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \quad (148)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha(T - T_0) \delta_{ij}$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (149)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

są współczynnikami Lamégo, E - moduł Young'a, ν - współczynnik Poissona, a α jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej.

Podsumowując, mamy 6 równań:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) + \alpha(T - T_0) \delta_{ij} \quad (150)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0)$$

Pomijając wpływ temperatury, otrzymujemy prawo Hooke'a w postaci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right]\end{aligned}\tag{151}$$

Dla ośrodka sprężystego, z (111) mamy $ds = ds^{(e)} = \frac{dQ}{T}$, zatem:

$$\rho T \dot{s} = \frac{dQ}{dt} = q_{i,i}\tag{152}$$

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \right) = q_{i,i}\tag{153}$$

Z drugiej strony:

$$\begin{aligned}c_v &= T \frac{\partial s}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \\ \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \\ -q_{i,i} &= k \Delta T \quad \text{korzystając z prawa Fouriera } q_i = -k T_{,i} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} &= -(3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} \quad \text{patrz. (150)}\end{aligned}$$

więc równanie (153) napiszemy w postaci:

$$k \Delta T = \rho c_v \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\varepsilon}_{kk}\tag{154}$$

Równanie to sprzęga ze sobą pole temperatury i pole przemieszczeń.

Ostatecznie, otrzymujemy następujący układ równań:

Linowa termosprężystość		Ilość równań
Związki kinematyczne	$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$	6
Równanie ciągłości	$\dot{\rho} + \rho \dot{u}_{i,i} = 0$	1
Równanie ruchu	$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i$	3
Sprężenie termo-mechaniczne	$k \Delta T = \rho c_v \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\varepsilon}_{kk}$	1
Prawo Hooke'a	$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0)$	6

Jest to układ 17 równań z 17 niewiadomymi: $\rho(1); u_i(3); \varepsilon_{ij}(6); \sigma_{ij}(6), T(1)$. Rozwiązania tego układu muszą spełniać warunki początkowe i brzegowe.

2.3 Energia odkształcania sprężystego

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \left(e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \right)\tag{155}$$

$$W = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} + \frac{1}{6} \sigma_{kk} \varepsilon_{mm}\tag{156}$$

Energia sprężysta odkształcania postaciowego:

$$W^{(1)} = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} s_{ij} \frac{s_{ij}}{2G} = \frac{II_s}{2G} = \frac{1+\nu}{E} II_s \quad (157)$$

Energia sprężysta odkształcania objętościowego:

$$W^{(2)} = \frac{1}{6} \sigma_{kk} \varepsilon_{mm} = \frac{1}{6} I_\sigma I_\varepsilon = \frac{1}{6} I_\sigma \frac{I_\sigma}{3K} = \frac{I_\sigma^2}{18K} = \frac{1-2\nu}{6E} I_\sigma^2 \quad (158)$$

2.4 O wpływie temperatury

1. W przypadku jednowymiarowym, odkształcenie termiczne wynosi:

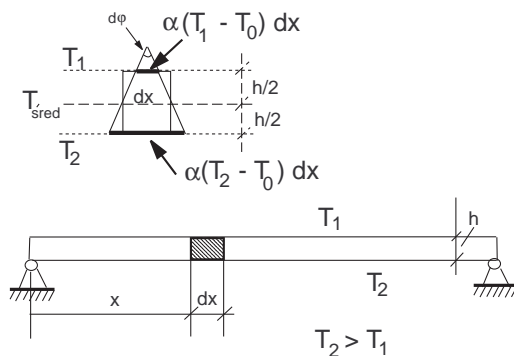
$$\varepsilon^T = \alpha \Delta T \quad (159)$$

Materiał	$\alpha (\times 10^{-6}/K)$
Aluminium	19,1 ÷ 22,2
Brąz	18 ÷ 21
Szkło	5 ÷ 11
Beton	7 ÷ 14
Stal	10 ÷ 18

Z prawa Hooke'a, $\sigma = E\varepsilon = E\alpha\Delta T$. Na przykład dla stali, przy $E = 280MPa$, $\Delta T = 100K$, naprężenie wynosi:

$$280 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 = 280kPa$$

czyli jest powónnywalne z obciążeniem mechanicznym spotykanym w praktyce. Zmiana długości pręta wynosi wtedy $\Delta l = \alpha \Delta T l$.



Rysunek 15: Wpływ temperatury na konstrukcję

2. Zakładamy, że dla belki rozkład temperatury jest liniowy $T_{\text{śred}} = \frac{T_1 + T_2}{2}$, zaś przyrost $\Delta l = \alpha (T_{\text{śred}} - T_0) l = \alpha \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) l$

$$h d\varphi = \alpha (T_2 - T_0) dx - \alpha (T_1 - T_0) dx$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha \frac{(T_2 - T_1)}{h}$$

Równanie dla ugięcia tej belki ma postać:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EJ} + \alpha \frac{(T_2 - T_1)}{h} \quad (160)$$

Przykład:

$$T_2 - T_1 = T_0 x, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\alpha T_0}{h} x, \quad w = \frac{T_0 \alpha}{6h} x^3 + C_1 x + C_2, \quad \text{warunki brzegowe } w = 0 \text{ dla } x = 0 \text{ i dla } x = l$$

2.5 Równanie Lamégo i równanie Beltramiiego-Michella

Z prawa Hooke'a i związków kinematycznych:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \theta = \varepsilon_{kk} = u_{i,i}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Różniczkujemy względem x_j :

$$\sigma_{ij,j} = \lambda \theta_{,j} \delta_{ij} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji}$$

Wstawiając ten związek do równania równowagi:

$$\sigma_{ij,j} + \varrho b_i = 0$$

otrzymamy

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu \Delta u_i + \varrho b_i = 0 \quad (161)$$

lub

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \varrho \mathbf{b} = 0 \quad (162)$$

Jest to równanie Lamégo.

Różniczkujemy (161) względem x_j :

$$\mu(\Delta u_i)_{,j} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} + (\varrho b_i)_{,j} = 0$$

Zamieniamy $i \rightarrow j; j \rightarrow i$:

$$\mu(\Delta u_j)_{,i} + (\lambda + \mu)\theta_{,ji} + (\varrho b_j)_{,i} = 0$$

i dodajemy te relacje:

$$2\mu \Delta \varepsilon_{ij} + 2(\lambda + \mu)\theta_{ij} + [(\varrho b_i)_{,j} + (\varrho b_j)_{,i}] = 0$$

Niech $\Theta = \sigma_{kk}$. Z prawa Hooke'a i powyższego równania otrzymamy:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \Theta_{,ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \Delta \Theta + [(\varrho b_i)_{,j} + (\varrho b_j)_{,i}] = 0 \quad (163)$$

Jest to równanie Beltramiiego-Michella.

2.6 Najprostsze zadanie

Określić odkształcenie pręta o długości l stojącego pionowo w polu sił ciężkości.

Z równań równowagi mamy $\partial\sigma_{zz}/\partial z + \varrho g = 0$. Na górnej podstawie $z = l$ powinno być $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Na bocznej powierzchni pręta wszystkie składowe naprężenia z wyjątkiem σ_{zz} powinny znikać. Rozwiązaniem równań równowagi spełniającym te warunki jest:

$$\sigma_{zz} = -\varrho g(l - z) \quad (164)$$

wszystkie pozostałe składowe są równe zeru.

Z prawa Hooke'a określamy odkształcenie:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = \frac{\nu}{E} \varrho g(l - z) \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\varrho g(l - z)}{E} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (165)$$

Całkując, otrzymujemy składowe wektora odkształcenia:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\nu}{E} \varrho g(l - z) x \\ u_y &= \frac{\nu}{E} \varrho g(l - z) y \\ u_z &= \frac{\varrho g}{2E} [z^2 - 2lz + \nu(x^2 + y^2)] \end{aligned} \quad (166)$$

2.7 Płaski stan

2.7.1 Płaski stan naprężenia (PSN)

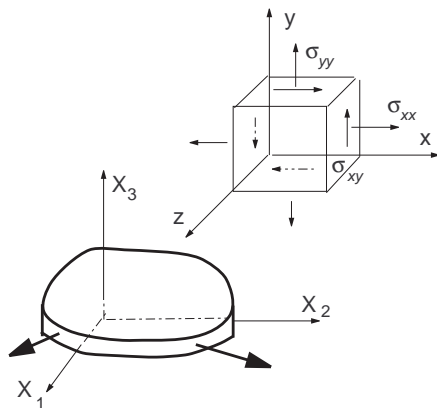
Wektor naprężenia na powierzchniach równoległych do pewnej powierzchni nieruchomej w tym przypadku równa się zeru:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0; \quad b_3 = 0 \quad (167)$$

Z prawa Hooke'a, z warunku $\sigma_{33} = 0$ mamy:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (168)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \end{cases} \quad (169)$$



Rysunek 16: Płaski stan naprężenia

2.7.2 Płaski stan odkształcenia (PSO)

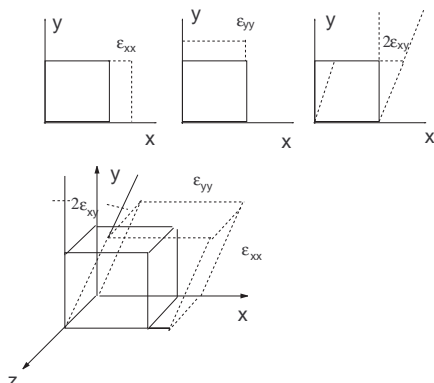
Wektor przemieszczenia dowolnego punktu jest równoległy do pewnej płaszczyzny, zwanej płaszczyzną odkształcenia. Nie zależy on od odległości do tej płaszczyzny (np. Ox_1x_2):

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); u_2 = u_2(x_1, x_2); u_3 = 0 \quad (170)$$

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (171)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (172)$$

czyli $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ nie zależą od x_3 , a pozostałe $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31}, \varepsilon_{33} = 0$



Rysunek 17: Płaski stan odkształcenia

Odkształcenia objętościowe

$$\theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (173)$$

Prawo Hooke'a

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \end{array} \right. \quad (174)$$

zatem z (174) wynika, że:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}); \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (175)$$

Wstawiając (175) do (174)₃, mamy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{11} - \nu_1 \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{22} - \nu_1 \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma_{12} \end{array} \right. \quad (176)$$

gdzie

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (177)$$

Porównując (169) i (176), możemy stwierdzić że pod względem matematycznym, nie ma różnicy między PSN i PSO.

Równania równowagi mają postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho b_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho b_2 = 0 \\ \rho b_3 = 0 \end{array} \right. \quad (178)$$

czyli, siła masowa jest równoległa do płaszczyzny odkształcenia oraz nie zależy od x_3 .

Równania niepodzielności w tym przypadku mają postać:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (179)$$

Korzystając z prawa Hooke'a i równań równowagi przy pominięciu sił masowych, możemy pokazać, że z (179) mamy:

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (180)$$

gdzie $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

2.7.3 Funkcja naprężenia Airy'ego

Układ trzech równań

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \\ \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \end{cases} \quad (181)$$

jest zamknięty dla naprężenia. Możemy rozwiązać *metodą funkcji naprężenia*. Niech Φ będzie taka funkcja, że:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (182)$$

Wtedy Φ spełnia *równanie biharmoniczne*:

$$\Delta \Delta \Phi \equiv \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \quad (183)$$

i nazywana jest funkcją naprężenia Airy'ego.

2.7.4 Podsumowanie

	PSN	PSO
Naprężenia	$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ mogą być różne od zera	$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ mogą być różne od zera
Odształcenia	$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ mogą być różne od zera	$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ mogą być różne od zera

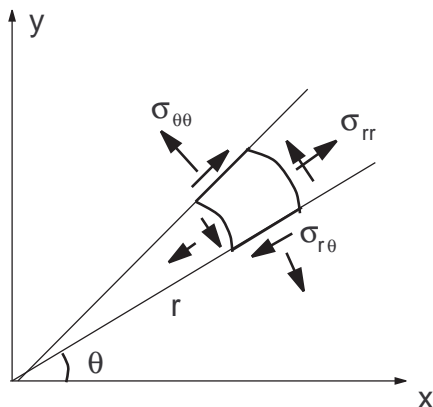
2.7.5 Zadanie płaskie we współrzędnych biegunowych r, ϑ

W układzie tym $x = r \cos \vartheta$; $y = r \sin \vartheta$. Równanie równowagi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (184)$$

Prawo Hooke'a dla PSN:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\vartheta\vartheta}) \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\vartheta\vartheta} - \nu \sigma_{rr}) \\ \varepsilon_{r\vartheta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{r\vartheta} \end{aligned} \quad (185)$$



Rysunek 18: Układ współrzędnych biegunowych

Funkcja naprężenia Airy'ego $\Phi = \Phi(r, \vartheta)$ oraz:

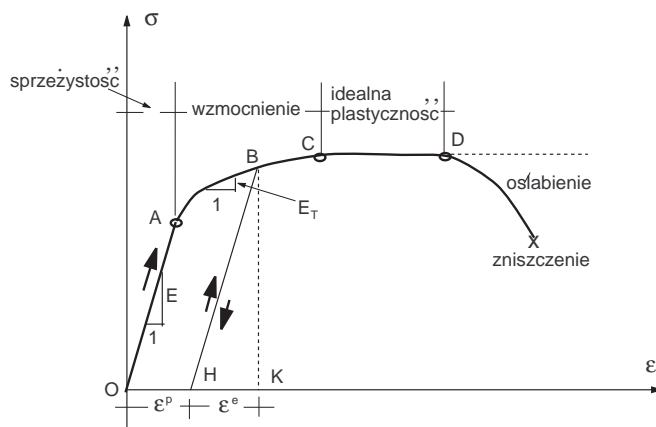
$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\vartheta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)\end{aligned}\quad (186)$$

Równania biharmoniczne dla $\Delta\Delta\Phi = 0$ ma postać:

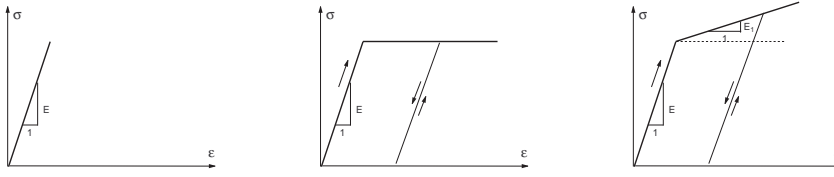
$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (187)$$

3 Sprężysto-plastyczność

Na rysunku 19 pokazano zachowanie przykładowego materiału podczas standardowej próby rozciągania.



Rysunek 19: Jednowymiarowa krzywa naprężenie-odkształcenie



Rysunek 20: Modele materiałów: a) sprężysty; b) sprężysto-idealnie plastyczny; c) sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem liniowym

3.1 Kryterium obciążenia lub odciążenia

1. Dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego (Rys 20) materiał jest sprężysty do momentu kiedy naprężenia osiągną pewną wartość.

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij}) - k^2 = 0, \quad (k = const) \quad (188)$$

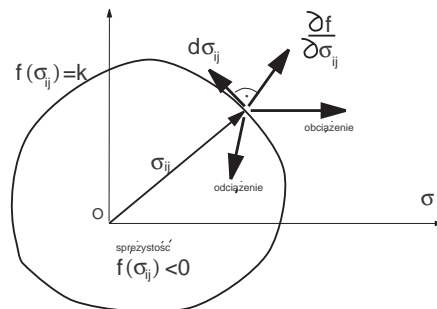
2. Zachodzą odkształcenia plastyczne. Aby płynięcie się kontynuowało, naprężenia muszą spełniać tzw. równanie powierzchni płynięcia. Jest to warunek obciążania:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (189)$$

3. Rozwój płynięcia plastycznego. Kiedy zdejmujemy naprężenia lub intensywność naprężeń spada poniżej granicy plastyczności, zachodzi proces odciążenia. Warunek odciążenia przyjmuje postać:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (190)$$

Powyższe wyniki możemy zilustrować w przestrzeni naprężenia. Postulowano istnienie powierzchni płynięcia $f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij}) - k^2 = 0$, która zależy tylko od stanu naprężenia:



Rysunek 21: Powierzchnia płynięcia

Każdy punkt, który znajduje się wewnątrz tej powierzchni odpowiada stanowi sprężystemu, a punkt który leży na powierzchni - stanowi plastycznemu.

W przypadku obciążenia, przrost odkształcenia jest sumą części sprężystej i plastycznej:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (191)$$

Natomiast w przypadku odciążenia, przyrost odkształcenia równa się tylko przyrostowi odkształcenia sprężystemu.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e \quad (192)$$

3.2 Przyrost odkształcenia sprężystego

Przyrost ten spełnia prawo Hooke'a. W przypadku materiału izotropowego, mamy (zob.(151)):

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl} d\sigma_{kl} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) d\sigma_{ij} - \nu d\sigma_{kk} \delta_{ij}] \quad (193)$$

3.3 Przyrost odkształcenia plastycznego

Wprowadzamy pewną funkcję $g(\sigma_{ij})$, którą nazywamy potencjałem plastycznym i która umożliwia zapisanie przyrostu odkształcenia plastycznego w postaci:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (194)$$

W szczególnym przypadku, kiedy potencjal plastyczny i powierzchnia płynięcia się pokrywają ($g = f$), mamy:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (195)$$

Relację (195) nazywamy stowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego. Według tej relacji wektor $d\varepsilon_{ij}^p$ jest wektorem normalnym do powierzchni $f(\sigma_{ij}) = 0$ w przestrzeni naprężenia.

3.4 Wzmocnienie plastyczne

Wiadomości przedstawione wcześniej dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego można uogólnić dla materiału ze wzmocnieniem.

Teoria plastyczności jest budowana na podstawie trzech założeń dotyczących powierzchni plastyczności początkowej, ewolucji powierzchni obciążenia i prawa płynięcia.

Powierzchnia płynięcia (188) jest tylko początkową powierzchnią plastyczności. Zakładamy istnienia powierzchni obciążenia, która zależy od stanu naprężenia, historii obciążenia, co możemy zapisać w postaci:

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) \quad (196)$$

W tym równaniu, ε_{ij}^p są odkształceniami plastycznymi a k jest parametrem wzmocnienia. Stany dla których $f = 0$ leżą na powierzchni plastyczności, a kiedy $f < 0$ mamy stan sprężysty.

1. Naprężenie efektywne: aby teoria plastyczności materiałów ze wzmocnieniem miała zastosowania praktyczne, musimy dla przypadku jednowymiarowego znaleźć związek między parametrem wzmocnienia k z równania (196) z danymi doświadczeniami. W tym celu wprowadzamy pojęcie naprężenia efektywnego σ_e , które jest funkcją naprężenia oraz pojęcie odkształcenia efektywnego ϵ_e . W przypadku jednowymiarowym, wykres funkcji $\sigma_e = \sigma_e(\epsilon_e)$ pokrywa się z wykresem $\sigma = \sigma(\epsilon)$

$$\sigma_e = \sqrt{3 II_s} \quad (197)$$

2. Plastyczne odkształcenie efektywne, które zależy od historii odkształcenia plastycznego. Są jego dwie definicje. Pierwsza definicja jest dana poprzez pracę odkształcenia plastycznego:

-

$$dW^p = \sigma_e d\epsilon_p \quad (198)$$

- Druga definicja, to zaakumulowane odkształcenia plastycznego.

$$d\epsilon_p = \sqrt{2/3 d\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} \quad (199)$$

Dla warunku Hubera-Misesa'a, (198) oraz (199) są równe.

3. Prawa wzmocnienia, które określają kolejne powierzchnie obciążenia w przestrzeni naprężeniowej:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) - k^2(\varepsilon_p) = 0 \quad (200)$$

4. Ostatnie założenie, to możliwość zdefiniowania pewnego potencjału $g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k)$ takiego, aby:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (201)$$

3.5 Przyrostowy związek naprężenie-odkształcenie

W czasie obciążenia plastycznego, pierwsze płynięcie a następne stany naprężenia muszą spełniać warunek $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0$, czyli:

$$f = 0 \quad \text{i} \quad f + df = 0 \quad (202)$$

czyli płynięcie plastyczne jest "skontrolowane" przez tzw. *warunek zgodności*:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (203)$$

gdzie parametr wzmocnienia k jest funkcją zależną od plastycznego odkształcenia $k = k(\varepsilon_{ij}^p)$.

Przyrost całkowitego odkształcenia składa się z części sprężystej i plastycznej:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (204)$$

gdzie sprężyste zachowanie spełnia prawo Hooke'a:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e \quad (205)$$

Z (204),(205) oraz (194) otrzymamy:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^e) = C_{ijkl}^e \left(d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (206)$$

Korzystając z powyższej relacji, (203) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e \left(d\varepsilon_{kl} - \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (207)$$

Z tego równania otrzymamy:

$$d\lambda = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{ij}) C_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}}{h + (\partial f / \partial \sigma_{mn}) C_{mnpq}^e (\partial g / \partial \sigma_{pq})} \quad (208)$$

gdzie h jest *funkcją wzmocnienia*:

$$h = -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (209)$$

Przyrost plastycznego odkształcenia jest funkcją całkowitego odkształcenia $d\varepsilon$ oraz gradientu początkowej i następnych powierzchni płynięcia plastycznego:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{rs}) C_{rskl}^e d\varepsilon_{kl}}{h + (\partial f / \partial \sigma_{mn}) C_{mnpq}^e (\partial g / \partial \sigma_{pq})} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (210)$$

Związek naprężenia-odkształcenia dla materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem ma postać:

$$d\sigma_{ij} = (C_{ijkl}^e + C_{ijkl}^p) d\varepsilon_{kl} \quad (211)$$

gdzie:

$$C_{ijkl}^p = -\frac{C_{ijtu}^e (\partial f / \partial \sigma_{rs}) (\partial g / \partial \sigma_{tu}) C_{rskl}^e}{h + (\partial f / \partial \sigma_{mn}) C_{mnpq}^e (\partial g / \partial \sigma_{pq})} \quad (212)$$

W ogólnym przypadku $C_{ijkl}^p \neq C_{klij}^p$ ponieważ $f \neq g$. W przypadku stowarzyszonego prawa płynięcia $f = g$ mamy:

$$C_{ijkl}^p = -\frac{C_{ijtu}^e (\partial f / \partial \sigma_{rs}) (\partial f / \partial \sigma_{tu}) C_{rskl}^e}{h + (\partial f / \partial \sigma_{mn}) C_{mnpq}^e (\partial f / \partial \sigma_{pq})}. \quad (213)$$

i ten tensor jest symetryczny.